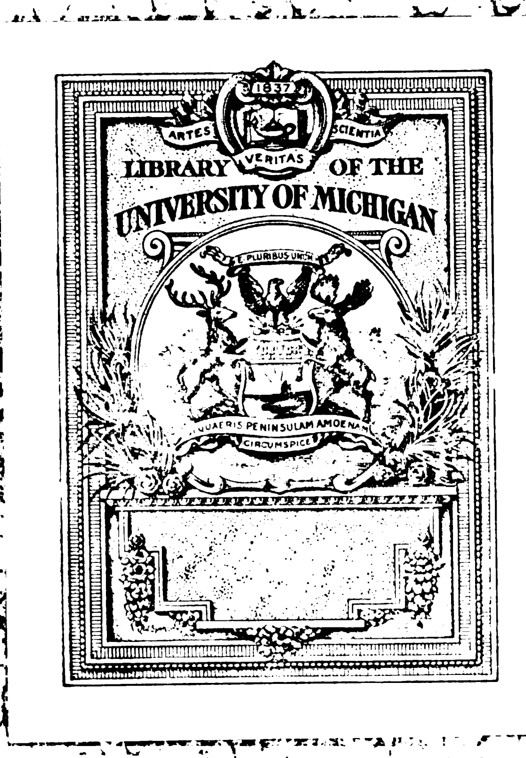
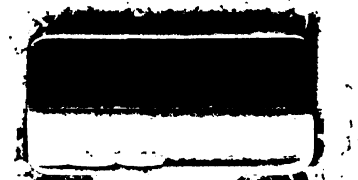

UNIV.
OF
MICH.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND VIII. Nro. 1.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Vierter Teil.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1911.

Inhaltsverzeichnis.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Vierter Teil.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 30. April 1910.

Einleitung.

Der vorliegende vierte Teil der Theorie der kleinen Planeten enthält die vollständigen Vorschriften zur Vergleichung der beobachteten mit den berechneten Oertern, zur Verbesserung der Elemente, und zur Aufstellung von Bewegungstafeln, aus denen fast ohne Rechnung die Daten zur Vorausberechnung einzelner Oerter oder einer Ephemeride entnommen werden können und die für längere Zeit — bis zu einem Jahrhundert — giltig bleiben.

Die erstere*) der beiden Aufgaben, welche ich mir im ersten Teil (Seite 4) gestellt habe, ist hiermit in aller Vollständigkeit gelöst und mir scheint der hier vorgeschlagene Weg auch der einzig gangbare, um das Riesenmaterial, das sich durch die zahlreichen Entdeckungen kleiner Planeten angehäuft hat, zu bewältigen.

Für die Lösung der zweiten**) Aufgabe ist der Weg geebnet.

1. Wenn die Ansichten über den gegenwärtigen Wert einer genaueren Kenntnis des Schwarmes der kleinen Planeten auch geteilt sind, so dürfen wir nicht vergessen, daß wir auch Pflichten gegen die Nachwelt haben und daß wir uns nicht auf die Ausführung solcher Arbeiten beschränken dürfen, deren Früchte uns gleich in den Schoß fallen.

Es scheint mir aber, als ob neben den Kometen, gerade die kleinen Planeten das Objekt bilden, an dessen Studium wir am ehesten Aussicht haben, in die tieferen Probleme der Mechanik des Himmels einzudringen, mögen sie nun kos-

*) Die Koordinaten der Planeten soweit genähert zu berechnen, daß man sie ohne Schwierigkeiten nach einem gewissen Zeitraum am Himmel wieder auffinden und die neuen Planeten von den bereits bekannten leicht unterscheiden kann.

**) Die Koordinaten der Planeten innerhalb der Beobachtungsfehler darzustellen.



mogonischer oder mechanischer Natur sein, und ich halte es daher für dringend wünschenswert, daß die Verfolgung dieser Himmelskörper in möglichst ökonomischer Weise betrieben würde, damit mit möglichst geringem Aufwand von Arbeit ein möglichst wertvolles Material zusammengetragen werde. Es ist sicher, daß so manche Beobachtung heutzutage unterlassen wird, die für die Zukunft von größtem Wert wäre und daß andererseits in Massen solche Beobachtungen angestellt werden, die man direkt als überflüssig bezeichnen kann. Wenn man z. B. sämtliche Beobachtungen eines Planeten sammelt, so sieht man, daß dieser in gewissen Jahren von vielen Seiten in überreichem Maße beobachtet, dann aber mehrere Jahre hindurch ganz vernachlässigt worden ist. Es erklärt sich dies natürlich einmal daraus, daß die Zahl der bekannten Planeten anfangs gering war und dann gewaltig anwuchs, andererseits daraus, daß man möglichst bald ausreichende Beobachtungen zur Bahnbestimmung eines neu entdeckten Planeten besitzen wollte; es zeigt aber auch das dringende Bedürfnis einer zweckmäßigen Organisation der Beobachtung und der Bearbeitung der kleinen Planeten.

Auf der Astronomenversammlung zu Bamberg im Jahre 1896 hat bereits Herr Bauschinger einen Plan für eine solche Organisation entwickelt und er hat diesen Plan auch, soweit es eben möglich war, mit Erfolg durchgeführt. Man muß sich vergegenwärtigen, daß diese Arbeit die Ueberwindung nicht geringer Schwierigkeiten erforderte, und daß sich wohl vor allem das Bedürfnis nach brauchbaren Methoden fühlbar machte. So sehr die Methode der speziellen Störungen in ihren Feinheiten ausgearbeitet worden ist, so kann sie doch schon im Prinzip nicht als eine befriedigende angesehen werden; denn mit ihrer Hilfe ist man nicht im Stande, ohne umständliche und unsichere Rechnung die Bearbeitung eines Planeten auf lange Zeit hinaus zu erledigen und vor allem gibt sie uns keinen Einblick in die Natur der Bewegungen. Diesem Mangel abzuhelfen, ist der Zweck unseres Unternehmens.

Man wird sich dem von Herrn Bauschinger vertretenen Standpunkte im allgemeinen anschließen müssen, natürlich mit den Modifikationen, die sich aus den in der Zwischenzeit gemachten Erfahrungen ergeben. Vor allem müßte wohl Rechnung und Beobachtung gemeinsam organisiert werden und der Gesichtspunkt berücksichtigt werden, daß für die Nachwelt ein geordnetes und übersichtliches Beobachtungsmaterial mehr wert ist als eine sorgfältig durchgeführte Rechnung; denn die letztere wird sich im Notfall immer nachholen lassen, während eine unterlassene Beobachtung unersetzlich ist.

Es liegt nicht in der Absicht des Verfassers, an dieser Stelle ein ausführliches Program für die Bearbeitung der kleinen Planeten zu entwerfen oder gar dem von Herrn Bauschinger ein anderes gegenüberzustellen. Ein solches praktisches Programm wird natürlich im engsten Maße von der Größe der Arbeitskräfte abhängen, die sich diesem Zweck widmen können.

Nur einige von anderer Seite vielleicht nicht eingehend erörterte Fragen wollen wir hier berühren.

Sehr wünschenswert wäre es zunächst, wenn das gesamte Beobachtungs-

material zweckmäßig zusammengestellt und in einer Form gegeben würde, die dem Rechner die Arbeit möglichst erleichtert. Bisher besteht das einzige allerdings sehr wertvolle Hilfsmittel, das dem Rechner zu Gebote steht, in der Nachweisung für die kleinen Planeten, die das Berliner Astronomische Jahrbuch alljährlich veröffentlicht. Es ist indessen recht mühsam, sich hiernach die Beobachtungen zusammenzusuchen. Die Form, in der diese veröffentlicht werden, ist bereits eine ziemlich einheitliche; indessen vermißt man doch häufig genug Angaben, die der Beobachter leicht machen könnte und die dem Rechner sehr zweckdienlich wären, wie z. B. die Angabe der Reduktion auf den Jahresanfang und womöglich auf Anfang oder Mitte des Jahrhunderts. Bei manchen Beobachtungen hat man Mühe, festzustellen, ob die Parallaxe angebracht ist oder nicht, oder die Vergleichssterne fehlen, oder auch die Parallaxe ist schon angebracht, man weiß aber nicht, mit welchem Betrage. Zur weiteren Erleichterung könnte man auch noch weitergehen und neben den Beobachtungen die Sonnenkoordinaten für die Beobachtungszeiten und womöglich die Differentialquotienten der Oerter nach den Elementen zufügen, eine Arbeit, die man freilich nicht gerade dem Beobachter wird aufbürden wollen. Wenn man nämlich alle diese Daten erst einmal zusammengestellt hat, so ist nach unserer Methode fast schon die Hälfte einer definitiven Bahnbestimmung erledigt. Vor allem aber findet auch ein zukünftiger Rechner diese unverändert bleibenden Daten bereits handlich vor und braucht sich nicht von neuem einer Rechenarbeit zu unterziehen, die deswegen besonders lästig ist, weil es zum großen Teil an zweckmäßigen Kontrollen fehlt.

Das Gesagte gilt zunächst von den Planeten, welche seit längeren Jahren beobachtet sind und für die ein unmittelbares Bedürfnis zur Weiterbeobachtung nicht vorliegt — Gruppe A und B von Herrn Bauschinger. Indessen würde sich ein gänzliches Aufgeben dieser Planeten, auch wenn sie kein besonderes typisches Interesse bieten, doch kaum empfehlen; es wäre nur zu bestimmen, nach welchem Zeitraum etwa neue Beobachtungen wünschenswert sind.

Für diejenigen Planeten, für welche zur Sicherung ihrer Bahnbestimmung noch unmittelbar Beobachtungen erforderlich sind — Herrn Bauschingers Gruppen C bis E —, wäre außerdem das Arbeitsprogramm weiterzuführen, welches dieser bereits seit einigen Jahren durchgeführt hat. Aehnliches gilt aber auch von den Neu-Entdeckungen, deren Bewältigung jedenfalls versucht werden sollte.

Nachdem in der angegebenen Weise für alle Planeten gesorgt ist, wird man natürlich allen den Planeten, welche zur Lösung kosmogonischer oder mechanischer Fragen eine besondere Bedeutung besitzen — Herrn Bauschingers Gruppe H — eine besondere Sorgfalt zuwenden. Jedenfalls wird man sie durch Beobachtung gründlicher verfolgen; jedoch scheint es mir nicht gerade geboten, auch ganz allgemein diesen Planeten rechnerisch besondere Aufmerksamkeit zu widmen, solange diese Rechnungen nicht schon ein spezielles Ziel zur Lösung interessanter Fragen im Auge haben. Es läßt sich von vornherein garnicht streng übersehen, welche Planeten man eigentlich zu diesen von Herrn Bau-

schinger typische genannten zählen soll; es kann sehr wohl sein, daß in der Zukunft die Ansichten über die Wichtigkeit der Verfolgung des einen oder des anderen Planeten sich ändern. Ich denke dabei z. B. an den Fall, daß zwei sonst kein besonderes Interesse bietende Planeten einmal sich außerordentlich stark einander nähern oder daß einmal ein solcher in die größte Nachbarschaft eines Kometen gerät. Schon aus diesem Grunde möchte ich nicht für das gänzliche Aufgeben der augenblicklich weniger interessanten Planeten eintreten. Ein allzu großer Aufwand von Rechnung aber bei den typischen Planeten würde sich deswegen nicht allgemein empfehlen, weil ein künftiger Theoretiker, der sich mit ihnen beschäftigt, von dieser Vorarbeit nur in sehr beschränktem Maße Nutzen ziehen würde.

2. Es soll nun hier eine kurze Uebersicht über die bei der Anwendung unserer Methode nötigen rechnerischen Operationen gegeben werden.

Man wird zunächst die im dritten Teil auseinandergesetzten Operationen auszuführen haben, indem man sich etwa drei oskulierende Elementensysteme des Planeten verschafft, sodann aus unseren Tafeln die Störungsausdrücke entnimmt und die Werte der von uns angewandten Bahnelemente bestimmt. In Ermangelung zuverlässiger oskulierender Elemente wird man irgendwelche elliptischen Elemente wählen, welche die Bewegung einigermaßen gut darstellen. Man ist auch nicht eng an die Methode des dritten Teils zur Bestimmung der Elemente gebunden; sondern man kann schon vor der Bestimmung dieser die im ersten Kapitel dieses Teils behandelte Transformation auf die Zeit als unabhängige Variable ausführen, wobei die Konstantenbestimmung einige leicht ersichtliche Modifikationen erleidet. Man würde diese Transformation ganz ersparen, wenn man analog unseren Tafeln des dritten Teils solche Tafeln entwürfe, welche die Koeffizienten der Ausdrücke von R, W u. s. w. bereits in der auf die Zeit transformierten Form gäbe. Solche Tafeln hätte ich gern noch der Arbeit beigegeben, mußte aber darauf verzichten, um die Veröffentlichung nicht noch weiter hinauszuschieben.

Die Entnahme der Störungsausdrücke aus den Tafeln erfordert sehr wenig Zeit und auch die genäherte Bestimmung der Elemente ist keine große Arbeit.

Sodann wird man die Beobachtungen (vgl. Kap. V) zu sammeln und auf ein gemeinsames Aequinoktium (Jahrhundert-Anfang oder -Mitte) zu reduzieren haben; die Korrektion für Parallaxe und Aberrationszeit erfordert die genäherte Kenntnis der geozentrischen Entfernung, die man sich, wenn keine Ephemeride vorliegen sollte, durch Schätzung oder Ueberschlagsrechnung verschaffen kann; eventuell ist später der reduzierte Ort etwas zu verbessern. Auch die Sonnenkoordinaten für die reduzierten Beobachtungszeiten kann man gleich aus einem Jahrbuch entnehmen; auch sie können bei schärferer Rechnung später einer kleinen Korrektion bedürfen, wenn die Aberrationszeit nämlich verbessert werden sollte.

Weiter wird man nach der bereits erwähnten Transformation der Koordinatenausdrücke auf die Zeit (Kap. I), am bequemsten verfahren, wenn man sich

gleich Bewegungstafeln (Kap. II—III) für den die Beobachtungen umspannenden Zeitraum rechnet; die Mühe ist nicht groß und viele der zu tabulierenden Größen wird man bei genauerer Kenntnis der Elemente kaum zu verbessern haben. Aus den Tafeln ist dann die Berechnung der beobachteten Oerter zur Vergleichung mit den Beobachtungen ein leichtes (vgl. Kap. V und den Schluß des Kap. XII). Hat man diese Differenzen gefunden, so wird man sich aus ihrem Gange ein Bild über die Zuverlässigkeit der Beobachtungen machen können und diejenigen auswählen, welche man der Bahnverbesserung zugrunde legen will; die Bildung von Normalörtern wird überflüssig sein.

Als eine etwas lästige Arbeit wird man jetzt die Berechnung der Differentialquotienten der beobachteten Oerter nach den Elementen (Kap. VI) empfinden; wenn sie auch nicht sehr langwierig ist, so sind doch die Rechnungen nicht so durchsichtig, daß man Rechenfehler leicht entdeckt.

Es erübrigt dann noch die Aufstellung der Bedingungsgleichungen, die Bildung und Auflösung der Normalgleichungen, worauf dann die schärferen Werte der Elemente bekannt sind (Kap. VI—VII). Diese Rechnung habe ich als eine sehr leicht von der Hand gehende empfunden, wohl hauptsächlich deswegen, weil man hier bekanntlich gute Kontrollen hat.

Hat man erst einmal eine solche Elementenbestimmung durchgeführt, so wird die Versuchung einer Wiederholung der Rechnung, z. B. unter Hinzuziehung weiterer Beobachtungen deswegen ziemlich groß sein, weil sie außerordentlich schnell sich erledigt; man braucht nämlich die lästigsten Operationen — Reduktion der Beobachtungen auf die Fundamentalepoche, Entnahme der Sonnenkoordinaten, Berechnung der Differentialquotienten — nicht zu wiederholen. Darum wäre es auch für künftige Rechner bequem, wenn diese Größen mit den Beobachtungen ein- für allemal zusammengestellt würden.

Hat man ein genügend zuverlässiges Elementensystem gefunden, so wird man auch gleich die Bewegungstafeln etwa für das nächste halbe Jahrhundert aufstellen, womit dann der Planet auf lange Zeit gesichert ist, ohne daß irgend eine Neurechnung erforderlich wäre. Hierin liegt wohl der Kernpunkt der Ueberlegenheit der Methode über die der speziellen Störungen. Nach meiner Erfahrung ist eine solche definitive Bahnbestimmung in etwa drei Wochen vollständig zu erledigen.

Es mag noch hinzugefügt werden, daß man die ganze Rechnung auch an der Hand der instantanen Elemente (Kap. XI) ausführen kann, anstatt die Gyldénschen Koordinaten zu benutzen; wie die Rechnung sich dann gestaltet, ist unschwer einzusehen. Die oskulierenden Elemente (Kap. X) sind hierzu weniger geeignet. Eine ausführliche Darstellung der Vorschriften bei Anwendung solcher Elementenstörungen habe ich nicht für unbedingt nötig gehalten; man kann nach unseren Entwicklungen mit Leichtigkeit von den Koordinatenstörungen zu denen der Elemente übergehen.

Außer der letzterwähnten bleiben noch manche anderen wichtigeren Untersuchungen übrig, auf deren Mitteilung ich vorläufig verzichten mußte. Zu ihnen



gehört im besonderen die Entwicklung einer Methode zur Berechnung der Störungen derjenigen Planeten, welche dem Jupiter näher kommen, als die in unseren Tafeln einbegriffenen, d. h. deren mittlere Bewegung kleiner als 709″ ist; hier kann die Abnahme der Glieder in den Reihenentwicklungen durch Einführung elliptischer Transzendenten erheblich verstärkt werden.

3. Vor allem aber gehört zu diesen hier nicht behandelten Fragen die nach der analytischen Bedeutung unserer Methode. Ich habe alle mathematischen Fragen und Entwicklungen hier bei Seite gelassen, weil diese in keiner Weise geeignet sind, den von uns verfolgten Zweck zu erleichtern, dagegen die Lektüre und Anwendung unserer Methode für viele Leser unnötig erschwert hätten. Ich habe dies Prinzip soweit gewahrt, daß ich selbst bei den vorzunehmenden Reihenentwicklungen nur einige Glieder entwickelt habe, ohne das Gesetz der Reihen aufzustellen, wie das ja auch sonst bei naturwissenschaftlichen Problemen meist nicht zu geschehen pflegt; z. B. die Reihen für die Längenstörungen (Kap. XI) habe ich so in knapper Form behandelt, obwohl eine elegante mathematische Form etwa durch Anwendung Besselscher Funktionen leicht zu erreichen gewesen wäre. Aber die Uebersicht hätte dadurch nicht gewonnen.

Es ist in letzter Zeit vielfach der Versuch gemacht worden, den Wert der rein rechnerischen astronomischen Methoden herabzusetzen und es tritt die Ansicht zu Tage, als ob der einzige Fortschritt der Mechanik des Himmels in analytischen Untersuchungen über den Charakter der Differentialgleichungen des Drei-Körper-Problems und ihrer Lösungen zu suchen sei. Dem muß entschieden widersprochen werden, wenn auch der Wert dieser Untersuchengen damit in keiner Weise in Frage gezogen werden soll. Es ist nur erfreulich, wenn unsere Wissenschaft nach allen Richtungen hin Fortschritte macht und wenn die Vorstöße der Naturwissenschaften in unbekanntes Gebiet so weit wie möglich mathematisch begründet werden. Es ist aber unbestreitbar, daß die wichtigen analytischen Resultate, die die letzte Zeit bei der Untersuchung des Drei-Körper-Problems erzeugt hat, im Verhältnis zu dem ganzen Gebiete des Problems nur ein kleines Fleckchen Terrain umfassen und daß sie für die Erkenntnis und Entdeckung der im Planetensystem wirkenden Naturkräfte in ihrem jetzigem Standpunkt ohne jede Bedeutung sind. Hoffen wir doch in nicht allzu ferner Zukunft Neues über diese Kräfte zu erfahren, das uns seit Newtons großer Entdeckung wieder einen erheblichen Schritt vorwärts führt und zur Erfüllung dieser Hoffnung kann der Astronom nur beitragen, wenn er beobachtet und rechnet und abermals rechnet, nicht aber, wenn er sich durch den geringen Erfolg aller analytischen Versuche entmutigen läßt. Auch die großen physikalischen Entdeckungen der Neuzeit, die für die Astronomie noch ihre Bedeutung gewinnen werden, sind die Früchte fleißiger experimenteller Beobachtung und Rechnung; rein analytische Untersuchungen hätten sie uns nie erschlossen.

Der Verfasser will hiermit nun keineswegs sagen, daß er ein Gegner analytischer Untersuchungen sei; vielmehr haben diese auch für ihn mehr Anziehungskraft als numerisches Rechnen. Es sollte nur gerechtfertigt werden, daß über

einige derartige unsere Methode betreffende Untersuchungen nicht hier, sondern an anderer Stelle berichtet werden wird und daß dort auch die etwas unverständlichen Bemerkungen, welche gelegentlich von anderer Seite über unsere Methode geäußert worden sind, berichtigt werden sollen.

Erstes Kapitel.

Darstellung der Gyldénschen Koordinaten als Funktionen der Zeit.

1. Im dritten Teil haben wir gezeigt, wie man mit Hilfe unserer Tafeln die Gyldénschen Koordinaten eines Planeten als Funktionen der wahren Länge in der Bahn v darstellen und daraus die heliozentrischen Koordinaten berechnen kann. Wir wollen nun alle diese Ausdrücke auf die Zeit t als unabhängige Veränderliche transformieren.

Wir erinnern hierzu an die Relationen (III. Teil, S. 6 und I. Teil, S. 32)

$$1)\qquad L = n(t-t_0) + \Lambda,$$

$$2)\qquad M = L - \Pi - W,$$

$$3)\qquad M = \mathrm{v} + \Sigma B_n \sin n\mathrm{v},$$

wo L der mittleren Länge und M der mittleren Anomalie analog ist, und zwar ersteres ohne, letzteres mit Einschluß der Störungen (Funktion W); im übrigen sei wegen der Bezeichnungen auf den dritten Teil verwiesen. Wir setzen

$$4)\qquad \mathrm{v} = M + \Phi$$

und haben zunächst v — oder die Mittelpunktsgleichung $\Phi = \mathrm{v} - M$ — nach Vielfachen von M zu entwickeln. Diese Entwicklung ist ganz analog der entsprechenden in der rein elliptischen Bewegung, welche man aber in den Lehrbüchern gewöhnlich nicht findet. Durch Umkehrung der Entwicklung 3) erhält man bis zu den Gliedern dritten Grades

$$5)\qquad \Phi = (2\eta - \tfrac{1}{4}\eta^3)\sin M + \tfrac{5}{4}\eta^2 \sin 2M + \tfrac{13}{12}\eta^3 \sin 3M.$$

Aus den obigen Gleichungen und aus der im dritten Teil gegebenen Definition der Argumente v_1, w, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$ ergibt sich ferner

$$6)\qquad \begin{aligned} \mathrm{v} &= L - \Pi + \Phi - W, & \mathfrak{v} &= L - \sigma + \Phi - W,\\ \mathrm{v}_1 &= L - \Pi_1 + \Phi - W, & \mathfrak{v}_1 &= L - \sigma_1 + \Phi - W,\\ w &= (1-\mu)L - B - V + (1-\mu)(\Phi - K), & v &= L + \Phi - W. \end{aligned}$$

2. Die weitere Entwicklung nimmt eine verschiedene Gestalt an, je nachdem man es mit einem gewöhnlichen oder mäßig charakteristischen oder mit einem stark charakteristischen Planeten zu tun hat, d. h. je nachdem die Funktion V sehr groß ist oder nicht und je nachdem X_2 verschwindet oder nicht.

Für den Fall, daß V mäßig groß ist, der meist vorliegt, setzen wir*)

$$V = V_0 + X_2 \tag{7}$$

und führen die neuen Argumente

$$\psi = (1-\mu)L - B - X_2, \quad \varphi = L - \Pi - X_2, \quad \chi = L - \sigma - X_2, \quad \varphi_1 = L - \Pi_1 - X_2, \quad \chi_1 = L - \sigma_1 - X_2 \tag{8}$$

ein, womit wird:

$$w = \psi + (1-\mu)(\Phi - K) - V_0, \quad \mathrm{v} = \varphi + \Phi - K - V_0, \quad \mathfrak{v} = \chi + \Phi - K - V_0, \quad \mathrm{v}_1 = \varphi_1 + \Phi - K - V_0, \quad \mathfrak{v}_1 = \chi_1 + \Phi - K - V_0 \tag{9}$$

und

$$M = \varphi - K - V_0. \tag{10}$$

Die Funktion X_2 wird meist, wie auch in unserem Beispiel Aegina, verschwinden und dann in den obigen Relationen zu unterdrücken sein.

Ist V dagegen sehr groß und dementsprechend auch sehr langperiodisch, so wird man setzen:

$$\psi = (1-\mu)L - B - V, \quad \varphi = L - \Pi - V, \quad \chi = L - \sigma - V, \quad \varphi_1 = L - \Pi_1 - V, \quad \chi_1 = L - \sigma_1 - V, \tag{8a}$$

womit

$$w = \psi + (1-\mu)(\Phi - K), \quad \mathrm{v} = \varphi + \Phi - K, \quad \mathfrak{v} = \chi + \Phi - K, \quad \mathrm{v}_1 = \varphi_1 + \Phi - K, \quad \mathfrak{v}_1 = \chi_1 + \Phi - K, \tag{9a}$$

$$M = \varphi - K. \tag{10a}$$

Die Argumente $\psi, \varphi, \varphi_1, \chi, \chi_1$, welche direkt L enthalten, sind in die Ausdrücke für die Gyldénschen Koordinaten an Stelle von $w, \mathrm{v}, \mathrm{v}_1, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1$ einzuführen, indem man nach Potenzen von $\Phi - K$ und eventuell von V_0 entwickelt. Diese Entwicklung ist leicht auszuführen, da nur ganz wenige Glieder dabei zu berücksichtigen sind. Indessen muß doch $\Phi - K$ und V_0 zunächst selbst durch die neuen Argumente ausgedrückt werden, was durch Annäherung sehr schnell erreicht wird.

3. Uebersichtlicher und bei größeren Exzentrizitäten empfehlenswerter wird es jedoch sein, die Transformation in der folgenden Weise sukzessive vorzunehmen, indem man zuerst M und dann L als unabhängige Veränderliche einführt.

---

*) Die Bezeichnung V_0 haben wir im zweiten Teil in anderer Bedeutung gebraucht, was aber keinen Anlaß zu Mißverständnissen geben kann.



Man hat nämlich

$$11)\quad \begin{aligned} v &= M+\Pi+\Phi, & \mathrm{v} &= M+\Phi, & \mathfrak{v} &= M+\Pi-\sigma+\Phi, \\ w &= (1-\mu)(M+\Pi)-B-\mu V+(1-\mu)\Phi, & \mathrm{v}_1 &= M+\Pi-\Pi_1+\Phi, & \mathfrak{v}_1 &= M+\Pi-\sigma_1+\Phi. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$12)\quad \begin{aligned} \bar\psi &= (1-\mu)(M+\Pi)-B-\mu V, & \bar\varphi &= M, & \bar\chi &= M+\Pi-\sigma, \\ &= (1-\mu)L-B-(1-\mu)K-V, & \bar\varphi_1 &= M+\Pi-\Pi_1, & \bar\chi_1 &= M+\Pi-\sigma_1, \end{aligned}$$

so wird:

$$13)\quad \begin{aligned} w &= \bar\psi+(1-\mu)\Phi, & \mathrm{v} &= \bar\varphi+\Phi, & \mathfrak{v} &= \bar\chi+\Phi, \\ & & \mathrm{v}_1 &= \bar\varphi_1+\Phi, & \mathfrak{v}_1 &= \bar\chi_1+\Phi \end{aligned}$$

und die Entwicklung nach Potenzen von Φ zur Einführung der Argumente $\bar\psi, \bar\varphi, \bar\varphi_1, \bar\chi, \bar\chi_1$ geht glatt von Statten. Die zu transformierenden Argumente haben die Form:

$$\frac{\cos}{\sin}(mw+n\mathrm{v}+n_1\mathrm{v}_1) = \frac{\cos}{\sin}[m\bar\psi+n\bar\varphi+n_1\bar\varphi_1+(m+n+n_1-m\mu)\Phi]$$

oder entwickelt:

$$= \frac{\cos}{\sin}(m\bar\psi+n\bar\varphi+n_1\bar\varphi_1) \mp (m+n+n_1-m\mu)\Phi\frac{\sin}{\cos}(m\bar\psi+n\bar\varphi+n_1\bar\varphi_1)$$
$$-\tfrac{1}{2}(m+n+n_1-m\mu)^2\Phi^2\frac{\cos}{\sin}(m\bar\psi+n\bar\varphi+n_1\bar\varphi_1) \pm \cdots$$

und ähnlich für die Argumente, welche $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ enthalten. Dabei ist aus 5) und 12):

$$14)\quad \begin{aligned} \Phi^2 &= 2\eta^2-2\eta^2\cos 2\bar\varphi+\tfrac{5}{2}\eta^3\cos\bar\varphi-\tfrac{5}{2}\eta^3\cos 3\bar\varphi, \\ \Phi^3 &= 6\eta^3\sin\bar\varphi-2\eta^3\sin 3\bar\varphi. \end{aligned}$$

Mehr als die dritten Potenzen von η zu berücksichtigen, wird kaum erforderlich sein; in unserm Beispiel erzeugen schon die Glieder in η^2 keinen merklichen Beitrag.

Man kann auch die Transformationsformel in der Form

$$15)\quad R = \bar R+\overline{\frac{DR}{Dv}}\Phi+\tfrac{1}{2}\overline{\frac{D^2R}{Dv^2}}\Phi^2+\cdots,$$

und analog für K und V, schreiben, wo die überstrichenen Größen $\bar R$, $\overline{\frac{DR}{Dv}}$ etc. zu bilden sind, indem man $\bar\psi, \bar\varphi, \bar\varphi_1, \bar\chi, \bar\chi_1$ an Stelle von $w, \mathrm{v}, \mathrm{v}_1, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1$ schreibt und wo das Zeichen D bedeutet, daß bei der Differentiation die langperiodischen Größen η, Π, Π_1, j, j' etc. als konstant anzusehen sind. Man wird auch hier meist für $\frac{DR}{Dv}$ den schon im dritten Teil (S. 15) abgeleiteten Wert von $\frac{dR}{dv}$ setzen und Φ^2 schon vernachlässigen können.

Vielleicht wird man auch vorziehen, die Transformation analytisch auszuführen; wenn man hierbei die Glieder 3. Grades vernachlässigt und z. B.



schreibt*):

$$
\begin{array}{llll}
16) & R = \sum \overline{R}_{n\cdot0\cdot0}\cos n\overline{\psi} & + \sum \overline{R}^{+1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(n\overline{\psi}+\overline{\varphi}) & + \sum \overline{R}^{+1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(n\overline{\psi}+\overline{\varphi}_1) \\
 & & + \sum \overline{R}^{-1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(n\overline{\psi}-\overline{\varphi}) & + \sum \overline{R}^{-1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(n\overline{\psi}-\varphi_1) \\
 & + \sum \overline{R}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos n\overline{\psi} & + \sum \overline{R}^{+2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(n\overline{\psi}+\overline{\varphi}+\overline{\varphi}_1) & + \sum \overline{R}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos n\overline{\psi} \\
 & + \sum \overline{R}^{+2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(n\overline{\psi}+2\overline{\varphi}) & + \sum \overline{R}^{+1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(n\overline{\psi}+\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) & + \sum \overline{R}^{+2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(n\overline{\psi}+2\overline{\varphi}_1) \\
 & + \sum \overline{R}^{-2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(n\overline{\psi}-2\overline{\varphi}) & + \sum \overline{R}^{-1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(n\overline{\psi}-\overline{\varphi}+\overline{\varphi}_1) & + \sum \overline{R}^{-2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(n\overline{\psi}-2\overline{\varphi}_1) \\
 & & + \sum \overline{R}^{-2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(n\overline{\psi}-\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) & + \text{etc.}
\end{array}
$$

so ist

$$
\begin{array}{ll}
17) & \overline{R}_{n\cdot0\cdot0} = R_{n\cdot0\cdot0}, \quad \overline{R}^{+1}_{n\cdot1\cdot0} = R^{+1}_{n\cdot1\cdot0} + n(1-\mu)R_{n\cdot0\cdot0}, \quad \overline{R}^{+1}_{n\cdot0\cdot1} = R^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \\
 & \qquad \overline{R}^{-1}_{n\cdot1\cdot0} = R^{-1}_{n\cdot1\cdot0} - n(1-\mu)R_{n\cdot0\cdot0}, \quad \overline{R}^{-1}_{n\cdot0\cdot1} = R^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \\
 & \overline{R}_{n\cdot2\cdot0} = R_{n\cdot2\cdot0} - n^2(1-\mu)^2 R_{n\cdot0\cdot0} - [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot1\cdot0} + [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, \\
 & \overline{R}^{+2}_{n\cdot2\cdot0} = R^{+2}_{n\cdot2\cdot0} + [\tfrac{5}{8}n(1-\mu) + \tfrac{1}{2}n^2(1-\mu)^2]R_{n\cdot0\cdot0} + [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot1\cdot0}, \\
 & \overline{R}^{-2}_{n\cdot2\cdot0} = R^{-2}_{n\cdot2\cdot0} - [\tfrac{5}{8}n(1-\mu) - \tfrac{1}{2}n^2(1-\mu)^2]R_{n\cdot0\cdot0} - [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, \\
 & \overline{R}^{+2}_{n\cdot1\cdot1} = R^{+2}_{n\cdot1\cdot1} + [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \quad \overline{R}^{-1}_{n\cdot1\cdot1} = R^{-1}_{n\cdot1\cdot1} - [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \\
 & \overline{R}^{+1}_{n\cdot1\cdot1} = R^{+1}_{n\cdot1\cdot1} + [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \quad \overline{R}^{-2}_{n\cdot1\cdot1} = R^{-2}_{n\cdot1\cdot1} - [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \\
 & \overline{R}_{n\cdot0\cdot2} = R_{n\cdot0\cdot2}, \quad \overline{R}^{+2}_{n\cdot0\cdot2} = R^{+2}_{n\cdot0\cdot2}, \quad \overline{R}^{-2}_{n\cdot0\cdot2} = R^{-2}_{n\cdot0\cdot2}.
\end{array}
$$

Für die Sinusfunktion $W = \sum W_{n\cdot0\cdot0}\sin nw + \text{etc.}$ gelten die den Relationen 17) ganz analogen Transformationsformeln. Für die charakteristischen Planeten wird man ohne weiteres die für diese nötigen Modifikationen erkennen.

4. Ueberhaupt erfordert diese Transformation die Bildung nur ganz weniger Glieder. In unserem Beispiel Aegina treten zu den bereits in den Ausdrücken 46) bis 53) des dritten Teils enthaltenen Gliedern — nachdem in ihnen $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_1$ etc. statt w, v, v_1 etc. geschrieben ist — nur noch die folgenden neu hinzu:

In R:

$$
\begin{array}{llll}
18) & \multicolumn{3}{l}{\{-(7{,}003)\sin 2\overline{\psi} - (8{,}089)\,\eta\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}) + (8{,}332)\,\eta'\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}_1\}\,\Phi} \\
 & = +(7{,}003)\,\eta\cos(2\overline{\psi}+\overline{\varphi}) & +(8{,}089)\,\eta^2\cos 3\overline{\psi} & -(8{,}332)\,\eta\eta'\cos(3\overline{\psi}+\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) \\
 & \quad -(7{,}003)\,\eta\cos(2\overline{\psi}-\overline{\varphi}) & -(8{,}089)\,\eta^2\cos(3\overline{\psi}-2\overline{\varphi}) & +(8{,}332)\,\eta\eta'\cos(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1).
\end{array}
$$

In K:

$$
\begin{array}{llll}
19) & (6{,}735)\,\eta\sin(\overline{\psi}+\overline{\varphi}) & -(7{,}460)\,\eta^2\sin 2\overline{\psi} & +(8{,}650)\,\eta\eta'\sin(3\overline{\psi}+\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) \\
 & -(7{,}232)\,\eta\sin(2\overline{\psi}+\overline{\varphi}) & -(7{,}693)\,\eta^2\sin 2\overline{\psi} & -(8{,}650)\,\eta\eta'\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) \\
 & & -(8{,}400)\,\eta^2\sin 3\overline{\psi} & \\
 & & +(7{,}460)\,\eta^2\sin(2\overline{\psi}+2\varphi) & +(8{,}572)\,\eta^2\sin(3\overline{\psi}+\overline{\varphi}) \\
 & -(6{,}735)\,\eta\sin(\overline{\psi}-\overline{\varphi}) & +(7{,}693)\,\eta^2\sin(2\overline{\psi}-2\overline{\varphi}) & -(8{,}572)\,\eta^2\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}) \\
 & +(7{,}232)\,\eta\sin(2\overline{\psi}-\overline{\varphi}) & +(8{,}400)\,\eta^2\sin(3\overline{\psi}-2\overline{\varphi}) & -(8{,}817)\,\eta^2\eta'\sin(3\overline{\psi}+2\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1) \\
 & & & +(8{,}817)\,\eta^2\eta'\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}_1).
\end{array}
$$

---

*) Die ähnlich gewählte Bezeichnungsweise der $\overline{R}$-Koeffizienten bei den vom Quadrat der Neigung abhängenden Gliedern (Teil II, S. 70 und Teil III, S. 4 wird keinen Anlaß zu Verwechslungen geben.

In V:

20) $(8{,}768)\,\eta^2\eta'\sin(3\overline{\psi}-\overline{\varphi}_1) \quad -(8{,}768)\,\eta^2\eta'\sin(3\overline{\psi}-2\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1)$.

Die letzteren beiden werden wir zu K überführen, da sie nicht langperiodisch sind, und die aus K entstandenen mit den Argumenten $3\overline{\psi}-2\overline{\varphi}$ und $3\overline{\psi}-\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_1$ dagegen in V aufnehmen. Streng genommen wird dadurch die Definition der Funktion V eine etwas andere, da sie diejenigen Glieder enthalten sollte, welche bei Anwendung von v, und nicht von t, als unabhängiger Veränderlicher langperiodisch sind. Indessen kommt dieser Unterschied nur für die Bildung der Argumente w resp. ψ, φ, φ_1 in Betracht und hier machen die kleinen Glieder garnichts aus.

Die Ausdrücke 18) bis 20) zeigen, daß bei Anwendung der Zeit t als unabhängiger Veränderlicher Glieder einiger Perioden auftreten (z. B. mit den Argumenten $\psi+\varphi$ und $2\psi+\varphi$), welche bei Anwendung von v unterhalb unserer Genauigkeitsgrenze liegen; dagegen werden allerdings bei der Transformation einige andere Glieder erheblich verkleinert. Im ganzen bestätigen aber die Ausdrücke unsere Behauptung, daß die Anwendung von v wesentliche Vorzüge bietet. Einige Glieder dritten Grades, welche bei der Transformation auftreten, haben wir beibehalten, obwohl einige von ihnen sich möglicherweise bei Hinzufügung der von uns vernachlässigten direkten Glieder dritten Grades bedeutend verkleinern dürften; sie sind aber überhaupt nicht sehr groß.

5. Nach Ausführung der vorstehenden Transformation wird man dann $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_1$ etc. durch ψ, φ, φ_1 etc. ersetzen, indem man bedenkt, daß entweder

$$21)\quad \overline{\psi}=\psi-(1-\mu)K-V_0,\qquad \begin{aligned}\overline{\varphi}&=\varphi-K-V_0, & \overline{\chi}&=\chi-K-V_0,\\ \overline{\varphi}_1&=\varphi_1-K-V_0, & \overline{\chi}_1&=\chi_1-K-V_0\end{aligned}$$

oder — wenn V sehr groß ist und man also nicht nach den Potenzen dieser Größe entwickeln, sondern sie in den Argumenten ψ, φ, φ_1 etc. beibehalten will (vgl. Gl. 8a) —:

$$21a)\quad \overline{\psi}=\psi-(1-\mu)K,\qquad \begin{aligned}\overline{\varphi}&=\varphi-K, & \overline{\chi}&=\chi-K,\\ \overline{\varphi}_1&=\varphi_1-K, & \overline{\chi}_1&=\chi_1-K\end{aligned}$$

und nach Potenzen von K und eventuell von V_0 entwickelt. Hier muß man eigentlich näherungsweise vorgehen, da K und V_0 selbst erst als Funktionen von ψ, φ, φ_1 etc. dargestellt werden müssen; es genügt aber vollkommen, in K und V_0 bei der Entwicklung (d. h. in den Argumenten 21) und 21a)) einfach ψ, φ, φ_1 etc. an die Stelle von $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_1$ zu setzen; in den meisten Fällen, wie in unserem Beispiel, ergibt die Entwicklung nach K und nach V_0 überhaupt keine merklichen Glieder.

Die Koeffizienten der Ausdrücke für $\eta\,{\cos \atop \sin}\,\Pi$, $\sin j\,{\cos \atop \sin}\,\sigma$ und $\mathfrak{z}$ ändern sich bei beiden Transformationen nicht merklich; man hat nur L an Stelle von v zu schreiben. Wäre dies doch der Fall, wie eventuell bei schärferen Rechnungen,

so wären auch hier z. B. die in $\eta \frac{\cos}{\sin} \Pi$ neu entstehenden Glieder, welche nicht langperiodisch sind, nach R überzuführen.

6. Wir stellen das Resultat der Transformation für Aegina nebst den numerischen Werten der Konstanten zusammen; die Bahnelemente, deren im dritten Teil ermittelte Werte noch nicht definitiv sind, sondern im folgenden verbessert werden sollen, haben wir in Klammern [] gesetzt, wie die von ihnen abhängenden Größen B, μ und δ; auch wird man nach genauerer Bestimmung von δ resp. α eventuell einige der Störungskoeffizienten verbessern.

$$22)\quad \begin{aligned} L &= n(t-t_0)+\Lambda, & \varphi &= L-\Pi-X_2,\\ \psi &= (1-\mu)L-B-X_2, & \varphi_1 &= L-\Pi_1-X_2,\\ B &= \Lambda'-\mu\Lambda, & \chi &= L-\sigma-X_2,\\ t_0 &= 1900 \text{ Jan. } 0{,}0 \text{ M. Z. Berlin}, & \chi_1 &= L-\sigma_1-X_2. \end{aligned}$$

$$23)\quad \begin{array}{llll} [\log\varkappa = 8{,}99949], & [\Gamma = 98^\circ{,}992], & [\Lambda = 26^\circ{,}793], & [\log n = 2{,}929990],\\ \log\varkappa_1 = 8{,}50595, & \Gamma_1 = \Pi_1 = 12^\circ{,}712, & [n = 851''{,}118], & [\log a = 0{,}413345],\\ \log\varsigma = 6{,}203, & & \Lambda' = 238^\circ{,}0470, & [\log\mu = 9{,}545868],\\ & & [B = 228^\circ{,}631], & [\log\delta = 8{,}73528_n]. \end{array}$$

$$24)\quad \eta \frac{\cos}{\sin} \Pi = \varkappa \frac{\cos}{\sin} (\varsigma L+\Gamma) + \varkappa_1 \frac{\cos}{\sin} \Gamma_1.$$

$$25)\quad \begin{aligned} R = &\ (5{,}462) && +(7{,}003)\,\eta\cos(2\psi+\varphi) && \\ &-(6{,}466)\cos\psi && +(7{,}562)\,\eta\cos(2\psi-\varphi) && -(6{,}974)\,\eta'\cos(2\psi-\varphi_1)\\ &+(6{,}890)\cos 2\psi && +(8{,}113)\,\eta\cos(3\psi-\varphi) && -(8{,}356)\,\eta'\cos(3\psi-\varphi_1)\\ &+(5{,}976)\cos 3\psi && -(6{,}655)\,\eta\cos(4\psi-\varphi) && +(6{,}992)\,\eta'\cos(4\psi-\varphi_1)\\ &+(8{,}089)\,\eta^2\cos 3\psi && -(8{,}332)\,\eta\eta'\cos(3\psi+\varphi-\varphi_1) && \\ &+(7{,}628)\,\eta^2\cos(2\psi-2\varphi) && -(8{,}801)\,\eta\eta'\cos(3\psi-\varphi-\varphi_1) && \\ &+(8{,}379)\,\eta^2\cos(3\psi-2\varphi) && +(8{,}235)\,\eta\eta'\cos(4\psi-\varphi-\varphi_1) && \\ &-(7{,}730)\,\eta^2\cos(4\psi-2\varphi) && -(8{,}037)\,\eta\eta'\cos(5\psi-\varphi-\varphi_1) && \\ &+(7{,}455)\,\eta^2\cos(5\psi-2\varphi). && && \end{aligned}$$

$$26)\quad \begin{aligned} K = &\ (6{,}924)\sin\psi && +(6{,}389)\,\eta\sin(\psi+\varphi) && -(7{,}292)\,\eta'\sin(\psi-\varphi_1)\\ &-(7{,}119)\sin 2\psi && -(6{,}656)\,\eta\sin(2\psi+\varphi) && +(7{,}731)\,\eta'\sin(2\psi-\varphi_1)\\ &-(6{,}114)\sin 3\psi && +(7{,}002)\,\eta\sin(\psi-\varphi) && +(8{,}674)\,\eta'\sin(3\psi-\varphi_1)\\ & && -(8{,}173)\,\eta\sin(2\psi-\varphi) && -(7{,}171)\,\eta'\sin(4\psi-\varphi_1)\\ & && -(8{,}424)\,\eta\sin(3\psi-\varphi) && \\ & && +(6{,}880)\,\eta\sin(4\psi-\varphi) && -(6{,}504)\,\varkappa\sin(\varphi+\Pi-\varsigma L-\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
-(7{,}458)\,\eta^2 \sin 2\psi & +(8{,}039)\,\eta\eta' \sin(3\psi+\varphi-\varphi_1) & +(8{,}572)\,\eta^2 \sin(3\psi+\varphi) \\
-(7{,}773)\,\eta^2 \sin 3\psi & -(8{,}651)\,\eta\eta' \sin(4\psi-\varphi-\varphi_1) & -(8{,}572)\,\eta^2 \sin(3\psi-\varphi) \\
+(7{,}460)\,\eta^2 \sin(2\psi+2\varphi) & +(8{,}296)\,\eta\eta' \sin(5\psi-\varphi-\varphi_1) & \\
+(7{,}131)\,\eta^2 \sin(2\psi-2\varphi) & & -(8{,}817)\,\eta^2\eta' \sin(3\psi+2\varphi-\varphi_1) \\
+(8{,}109)\,\eta^2 \sin(4\psi-2\varphi) & +(8{,}583)\,\eta'^2 \sin(4\psi-2\varphi_1) & +(9{,}094)\,\eta^2\eta' \sin(3\psi-\varphi_1) \\
-(7{,}728)\,\eta^2 \sin(5\psi-2\varphi) & -(8{,}261)\,\eta'^2 \sin(5\psi-2\varphi_1) & -(8{,}768)\,\eta^2\eta' \sin(3\psi-2\varphi-\varphi_1).
\end{array}$$

27) $$\begin{array}{lll}
V = (9{,}5054)\eta^2\sin(3\psi-2\varphi) & +(7{,}763)\varkappa^2\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+2\varsigma L+2\Gamma) & +(8{,}603)\sin^2 j\sin(3\psi-2\chi) \\
\quad -(0{,}0543)\eta\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) & -(7{,}819)\varkappa\varkappa'\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+\varsigma L+\Gamma+\Gamma_1) & -(8{,}904)\sin j\sin j'\sin(3\psi-\chi-\chi_1) \\
\quad +(9{,}241)\eta'^2\sin(3\psi-2\varphi_1). & &
\end{array}$$

28) $$\sin j \frac{\cos}{\sin} \sigma = \sin \iota \frac{\cos}{\sin} (\Theta - \tau L) + \sin \iota_1 \frac{\cos}{\sin} \Theta_1.$$

29) $$\begin{array}{ll}
[\log \sin \iota = 8{,}63494], & [\Theta = 339^\circ{,}096], \\
\log \sin \iota_1 = 8{,}35871, & \Theta_1 = \sigma_1 = 99^\circ{,}438, \\
\log \tau = 6{,}179. &
\end{array}$$

30) $$\begin{aligned}
\mathfrak{z} &= (7{,}237) \sin j \sin(3\psi - \chi) - (7{,}237) \sin j' \sin(3\psi - \chi_1), \\
\mathfrak{N} &= \Sigma.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei der größeren Allgemeinheit wegen die Größe X_2 in den Argumenten stehen lassen, obwohl sie in unserem Falle verschwindet. Bei sehr stark kommensurablen Planeten, für welche die Relationen 8a) bis 10a) und 21a) angenommen werden, tritt die ganze Funktion V hier an Stelle von X_2.

Die vorstehenden Ausdrücke sind diejenigen, welche wir der Bewegung der Aegina zugrunde legen; die Epoche ist stets 1900 Jan. 0,0 M. Z. Berlin und als mittleres Aequinoctium gilt 1900.0.

Zweites Kapitel.

Weitere Transformation der Ausdrücke für die Gyldénschen Koordinaten zum Zweck der Tabulierung.

1. Wir wollen aber die für R, W etc. gefundenen Werte noch weiter transformieren, um sie einer bequemen Tabulierung zugänglich zu machen. Hierzu führen wir je nach dem Typus, dem der Planet angehört, verschiedene Argumente ein; für den Hestiatypus setzen wir:



$$
\begin{aligned}
& f = -\frac{\delta}{3}L + B + X_2, && && f = -\frac{\delta}{3}L + B + V, \\
31)\quad & u = \Pi + X_2, \quad \mathfrak{u} = \sigma + X_2 && \text{resp. } 31a) && u = \Pi + V, \quad \mathfrak{u} = \sigma + V, \\
& u_1 = \Pi_1 + X_2, \quad \mathfrak{u}_1 = \sigma_1 + X_2 && && u_1 = \Pi_1 + V, \quad \mathfrak{u}_1 = \sigma_1 + V.
\end{aligned}
$$

Von diesen Argumenten ist das erste — f — langperiodisch (von der Form C), die beiden letzteren äußerst langperiodisch (von der Form A).

Für den $\frac{1}{4}$-Typus wird man $f = -\frac{\delta}{4}L + B$, für den $\frac{2}{5}$-Typus $f = -\frac{2\delta}{5}L + B$ und für die gewöhnlichen Planeten einen analogen passenden Ausdruck setzen.

Sodann ist:

$$
32)\qquad
\begin{aligned}
\psi &= \tfrac{2}{3}L - f, \\
\varphi &= L - u, \qquad \chi = L - \mathfrak{u}, \\
\varphi_1 &= L - u_1, \qquad \chi_1 = L - \mathfrak{u}_1
\end{aligned}
$$

und wir können schreiben:

$$
33)\qquad R = \sum_1^\infty C_i \sin\frac{i}{3}L + \sum_0^\infty D_i \cos\frac{i}{3}L,
$$

$$
34)\qquad K = \sum_1^\infty A_i \sin\frac{i}{3}L + \sum_0^\infty B_i \cos\frac{i}{3}L,
$$

wo die langperiodischen Funktionen A_i, B_i, C_i, D_i durch folgende Relationen gegeben sind:

$$
35)\qquad
\begin{aligned}
D_0 &= (5{,}462) + (8{,}379)\,\eta^2 \cos(3f - 2u) - (8{,}801)\,\eta\eta' \cos(3f - u - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_1 \\ D_1 \end{matrix}\right\} &= (7{,}562)\,\eta \tfrac{\sin}{\cos}(2f - u) - (6{,}974)\,\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(2f - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_2 \\ D_2 \end{matrix}\right\} &= -(6{,}466) \tfrac{\sin}{\cos} f \mp (7{,}628)\,\eta^2 \tfrac{\sin}{\cos}(2f - 2u) - (7{,}730)\,\eta^2 \tfrac{\sin}{\cos}(4f - 2u) \\
&\qquad + (8{,}235)\,\eta\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(4f - u - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_3 \\ D_3 \end{matrix}\right\} &= (8{,}113)\,\eta \tfrac{\sin}{\cos}(3f - u) - (8{,}356)\,\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(3f - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_4 \\ D_4 \end{matrix}\right\} &= (6{,}890) \tfrac{\sin}{\cos} 2f + (7{,}455)\,\eta^2 \tfrac{\sin}{\cos}(5f - 2u) - (8{,}037)\,\eta\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(5f - u - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_5 \\ D_5 \end{matrix}\right\} &= -(6{,}655)\,\eta \tfrac{\sin}{\cos}(4f - u) + (6{,}992)\,\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(4f - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_6 \\ D_6 \end{matrix}\right\} &= (5{,}976) \tfrac{\sin}{\cos} 3f + (8{,}089)\,\eta^2 \tfrac{\sin}{\cos} 3f - (8{,}332)\,\eta\eta' \tfrac{\sin}{\cos}(3f + u - u_1), \\
\left.\begin{matrix} C_7 \\ D_7 \end{matrix}\right\} &= (7{,}003)\,\eta \tfrac{\sin}{\cos}(2f + u),
\end{aligned}
$$

$$36)\quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = -(7{,}002)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(f-u) \mp (8{,}173)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(2f-u) + (7{,}292)\,\eta' \frac{\cos}{\sin}(f-u_1) \pm (7{,}731)\,\eta' \frac{\cos}{\sin}(2f-u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \pm (6{,}924) \frac{\cos}{\sin} f - (7{,}131)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(2f-2u) \pm (8{,}109)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(4f-2u) \mp (8{,}651)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(4f-u-u_1) \pm (8{,}583)\,\eta'^2 \frac{\cos}{\sin}(4f-2u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_3 \\ B \end{Bmatrix} = \mp (8{,}424)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(3f-u) \pm (8{,}674)\,\eta' \frac{\cos}{\sin}(3f-u_1) \mp (6{,}504)\,\varkappa \frac{\cos}{\sin}(u-\Pi+gL+\Gamma) \mp (8{,}572)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(3f-u) \pm (9{,}094)\,\eta^2\eta' \frac{\cos}{\sin}(3f-u_1) + (8{,}768)\,\eta^2\eta' \frac{\cos}{\sin}(3f-2u-u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \mp (7{,}119) \frac{\cos}{\sin} 2f \mp (7{,}458)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2f \mp (7{,}728)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(5f-2u) \pm (8{,}296)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(5f-u-u_1) \mp (8{,}261)\,\eta'^2 \frac{\cos}{\sin}(5f-2u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{Bmatrix} = \pm (6{,}389)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(f+u) \pm (6{,}880)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(4f-u) \mp (7{,}171)\,\eta' \frac{\cos}{\sin}(4f-u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_6 \\ B_6 \end{Bmatrix} = \mp (6{,}114) \frac{\cos}{\sin} 3f \mp (7{,}773)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 3f \pm (8{,}039)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(3f+u-u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_7 \\ B_7 \end{Bmatrix} = \mp (6{,}656)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(2f+u),$$

$$\begin{Bmatrix} A_8 \\ B_8 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} A_9 \\ B_9 \end{Bmatrix} = \pm (8{,}572)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(3f+u) \mp (8{,}817)\,\eta^2\eta' \frac{\cos}{\sin}(3f+2u-u_1),$$

$$\begin{Bmatrix} A_{10} \\ B_{10} \end{Bmatrix} = \pm (7{,}460)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(2f+2u)$$

und

$$37)\quad V = -(9{,}5054)\,\eta^2 \sin(3f-2u) + (0{,}0543)\,\eta\eta' \sin(3f-u-u_1) - (9{,}241)\,\eta'^2 \sin(3f-2u_1) - (7{,}763)\,\varkappa^2 \sin[3f-2u+2(\Pi-gL-\Gamma)] + (7{,}819)\,\varkappa\varkappa' \sin[3f-2u+(2\Pi-gL-\Gamma-\Gamma_1)] - (8{,}603)\sin^2 j \sin(3f-2u) + (8{,}904)\sin j \sin j' \sin(3f-u-u_1).$$

2. Nun lassen sich aber weiter die Größen A_i, B_i, C_i, D_i wie folgt zerlegen:

$$38)\quad D_0 = c_{0.0} + d_{0.3}\sin 3f + c_{0.3}\cos 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_1\\D_1\end{matrix}\right\} = c_{1.2}\,{\sin \atop \cos} 2f \mp d_{1.2}\,{\cos \atop \sin} 2f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right\} = c_{2.1}\,{\sin \atop \cos} f \mp c_{2.2}\,{\sin \atop \cos} 2f + d_{2.2}\,{\cos \atop \sin} 2f + c_{2.4}\,{\sin \atop \cos} 4f \mp d_{2.4}\,{\cos \atop \sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_3\\D_3\end{matrix}\right\} = c_{3.3}\,{\sin \atop \cos} 3f \mp d_{3.3}\,{\cos \atop \sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_4\\D_4\end{matrix}\right\} = c_{4.2}\,{\sin \atop \cos} 2f + c_{4.5}\,{\sin \atop \cos} 5f \mp d_{4.5}\,{\cos \atop \sin} 5f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_5\\D_5\end{matrix}\right\} = c_{5.4}\,{\sin \atop \cos} 4f \mp d_{5.4}\,{\cos \atop \sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_6\\D_6\end{matrix}\right\} = c_{6.3}\,{\sin \atop \cos} 3f \pm d_{6.3}\,{\cos \atop \sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_7\\D_7\end{matrix}\right\} = c_{7.2}\,{\sin \atop \cos} 2f \pm d_{7.2}\,{\cos \atop \sin} 2f,$$

$$39)\quad \left.\begin{matrix}A_1\\B_1\end{matrix}\right\} = \mp a_{1.1}\,{\sin \atop \cos} f - b_{1.1}\,{\cos \atop \sin} f + a_{1.2}\,{\sin \atop \cos} 2f \pm b_{1.2}\,{\cos \atop \sin} 2f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right\} = \pm b_{2.1}\,{\cos \atop \sin} f \mp a_{2.2}\,{\sin \atop \cos} 2f - b_{2.2}\,{\cos \atop \sin} 2f + a_{2.4}\,{\sin \atop \cos} 4f \pm b_{2.4}\,{\cos \atop \sin} 4f,$$

$$A_3 = a_{3.3}\sin 3f + b_{3.3}\cos 3f + b_{3.0} - a_{3.-3}\sin 3f - b_{3.-3}\cos 3f,$$

$$B_3 = a_{3.3}\cos 3f - b_{3.3}\sin 3f - a_{3.0} + a_{3.-3}\cos 3f - b_{3.-3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_4\\B_4\end{matrix}\right\} = \pm b_{4.2}\,{\cos \atop \sin} 2f + a_{4.5}\,{\sin \atop \cos} 5f \pm b_{4.5}\,{\cos \atop \sin} 5f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_5\\B_5\end{matrix}\right\} = -a_{5.1}\,{\sin \atop \cos} f \pm b_{5.1}\,{\cos \atop \sin} f + a_{5.4}\,{\sin \atop \cos} 4f \pm b_{5.4}\,{\cos \atop \sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_6\\B_6\end{matrix}\right\} = -a_{6.3}\,{\sin \atop \cos} 3f \pm b_{6.3}\,{\cos \atop \sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_7\\B_7\end{matrix}\right\} = -a_{7.2}\,{\sin \atop \cos} 2f \pm b_{7.2}\,{\cos \atop \sin} 2f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_9\\B_9\end{matrix}\right\} = -a_{9.3}\,{\sin \atop \cos} 3f \pm b_{9.3}\,{\cos \atop \sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}A_{10}\\B_{10}\end{matrix}\right\} = -a_{10.2}\,{\sin \atop \cos} 2f \pm b_{10.2}\,{\cos \atop \sin} 2f,$$

wo

$$40)\quad c_{0.0} = (5{,}462),$$

$$\left.\begin{matrix}c_{0.3}\\d_{0.3}\end{matrix}\right\} = (8{,}379)\,\eta^2\,{\cos \atop \sin} 2u - (8{,}801)\,\eta\eta'\,{\cos \atop \sin}(u + u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}c_{1.2}\\d_{1.2}\end{matrix}\right\} = (7{,}562)\,\eta\,{\cos \atop \sin} u - (6{,}974)\,\eta'\,{\cos \atop \sin} u_1,$$

$$c_{2\cdot1} = -(6{,}466),$$

$$\left.\begin{matrix} c_{2\cdot2} \\ d_{2\cdot2} \end{matrix}\right\} = (7{,}628)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u,$$

$$\left.\begin{matrix} c_{2\cdot4} \\ d_{2\cdot4} \end{matrix}\right\} = -(7{,}730)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u + (8{,}235)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} c_{3\cdot3} \\ d_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = (8{,}113)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u - (8{,}356)\,\eta' \frac{\cos}{\sin} u_1,$$

$$c_{4\cdot2} = (6{,}890),$$

$$\left.\begin{matrix} c_{4\cdot5} \\ d_{4\cdot5} \end{matrix}\right\} = (7{,}455)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u - (8{,}037)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} c_{5\cdot4} \\ d_{5\cdot4} \end{matrix}\right\} = -(6{,}655)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u + (6{,}992)\,\eta' \frac{\cos}{\sin} u_1,$$

$$c_{6\cdot3} = (5{,}976) + (8{,}089)\,\eta^2 - (8{,}332)\,\eta\eta' \cos(u-u_1),$$

$$d_{6\cdot3} = -(8{,}332)\,\eta\eta' \sin(u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} c_{7\cdot2} \\ d_{7\cdot2} \end{matrix}\right\} = (7{,}003)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u,$$

41)
$$\left.\begin{matrix} a_{1\cdot1} \\ b_{1\cdot1} \end{matrix}\right\} = (7{,}002)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}292)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{1\cdot2} \\ b_{1\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(8{,}173)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u + (7{,}731)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$b_{2\cdot1} = (6{,}924),$$

$$\left.\begin{matrix} a_{2\cdot2} \\ b_{2\cdot2} \end{matrix}\right\} = (7{,}131)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{2\cdot4} \\ b_{2\cdot4} \end{matrix}\right\} = (8{,}109)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u - (8{,}651)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) + (8{,}583)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot3} \\ b_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = -(8{,}424)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u + (8{,}674)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1 - (8{,}572)\,\eta^3 \frac{\sin}{\cos} u + (9{,}094)\,\eta^2\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot-3} \\ b_{3\cdot-3} \end{matrix}\right\} = -(8{,}768)\,\eta^2\eta' \frac{\sin}{\cos}(2u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot0} \\ b_{3\cdot0} \end{matrix}\right\} = -(6{,}504)\,\varkappa \frac{\sin}{\cos}(u - \Pi + gL + \Gamma),$$

$$b_{4\cdot2} = -(7{,}119) - (7{,}458)\,\eta^2,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{4\cdot5} \\ b_{4\cdot5} \end{matrix}\right\} = -(7{,}728)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u + (8{,}296)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) - (8{,}261)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{5\cdot1} \\ b_{5\cdot1} \end{matrix}\right\} = (6{,}889)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{5\cdot4} \\ b_{5\cdot4} \end{matrix}\right\} = (6{,}880)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}171)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$a_{6\cdot 2} = (8{,}039)\,\eta\eta' \sin(u-u_1),$$
$$b_{6\cdot 2} = -(6{,}114)-(7{,}773)\,\eta^2+(8{,}039)\,\eta\eta'\cos(u-u_1),$$
$$\left.\begin{matrix}a_{7\cdot 2}\\ b_{7\cdot 2}\end{matrix}\right\} = -(6{,}656)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u,$$
$$\left.\begin{matrix}a_{9\cdot 2}\\ b_{9\cdot 2}\end{matrix}\right\} = (8{,}572)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u-(8{,}817)\,\eta^2\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2u-u_1),$$
$$\left.\begin{matrix}a_{10\cdot 2}\\ b_{10\cdot 2}\end{matrix}\right\} = (7{,}460)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u.$$

Ebenso kann man schreiben:

$$V = -a_{0\cdot 2}\cos 3f+b_{0\cdot 2}\sin 3f, \tag{42}$$

wo

$$\left.\begin{matrix}a_{0\cdot 2}\\ b_{0\cdot 2}\end{matrix}\right\} = -(9{,}5054)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u+(0{,}0543)\,\eta\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(u+u_1)-(9{,}241)\,\eta'^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u_1 \tag{43}$$
$$-(7{,}763)\,\varkappa^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[2u-2(\Pi-\varsigma L-\Gamma)]$$
$$+(7{,}819)\,\varkappa\varkappa' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[2u-(2\Pi-\varsigma L-\Gamma-\Gamma_1)]$$
$$-(8{,}603)\sin^2 j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u+(8{,}904)\sin j\sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(u+u_1).$$

3. In gleicher Weise setzen wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= G_2\sin L+H_2\cos L,\\ \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} &= G_2'\sin L+H_2'\cos L,\end{aligned} \tag{44}$$

wo

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}G_2\\ H_2\end{matrix}\right\} &= \pm(7{,}237)\sin j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3f-u)\mp(7{,}237)\sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3f-u_1),\\ \left.\begin{matrix}G_2'\\ H_2'\end{matrix}\right\} &= (7{,}213)\sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u)-(7{,}213)\sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u_1)\end{aligned} \tag{45}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}G_2\\ H_2\end{matrix}\right\} &= g_{2\cdot 2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f \pm h_{2\cdot 2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3f,\\ \left.\begin{matrix}G_2'\\ H_2'\end{matrix}\right\} &= g_{2\cdot 2}' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f \mp h_{2\cdot 2}' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3f,\end{aligned} \tag{46}$$

wo

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}g_{2\cdot 2}\\ h_{2\cdot 2}\end{matrix}\right\} &= (7{,}237)\sin j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u-(7{,}237)\sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u_1,\\ \left.\begin{matrix}g_{2\cdot 2}'\\ h_{2\cdot 2}'\end{matrix}\right\} &= (7{,}213)\sin j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u-(7{,}213)\sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u_1,\end{aligned} \tag{47}$$

Hat man $\mathfrak{Z}$ und $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ berechnet, so findet man aus Gl. 16) des dritten Teils i und Σ.

4. Indessen wird es meist zweckmäßiger sein, die Größen i und Σ direkt zu ermitteln, ohne vorher $\mathfrak{Z}$ und $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ zu berechnen, besonders wenn die Funktion $\mathfrak{Z}$ keine merklichen „gewöhnlichen" Glieder, sondern nur charakteristische, also hier vom 3-fachen Winkel abhängende enthält. Wir haben nämlich in unserem Falle

$$48)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \zeta_1 \sin j \sin (3w - \mathrm{v}) + \zeta_2 \sin j' \sin (3w - \mathrm{v}_1), \\ \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} &= (1+\delta)\,\zeta_1 \sin j \cos (3w - \mathrm{v}) + (1+\delta)\,\zeta_2 \sin j' \cos (3w - \mathrm{v}_1) \end{aligned}$$

und sodann aus Gl. 16) des dritten Teils:

$$49)\qquad \begin{aligned} \sin i \cos \Sigma &= \sin j \cos \sigma + (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_1 \sin j \cos (3w - 2v + \sigma) \\ &\qquad + (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_2 \sin j' \cos (3w - 2v + \sigma_1), \\ \sin i \sin \Sigma &= \sin j \sin \sigma - (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_1 \sin j \sin (3w - 2v + \sigma) \\ &\qquad - (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_2 \sin j' \sin (3w - 2v + \sigma_1). \end{aligned}$$

Wenn wir diese Ausdrücke nach Analogie des ersten Kapitels auf die Zeit transformieren, so gehen die Argumente $3w - 2v + \sigma$ und $3w - 2v + \sigma_1$ einfach in $-3f + 2\mathrm{u} - \sigma$ und $-3f + 2\mathrm{u}_1 - \sigma_1$ oder in $-3f + \sigma + 2X_2$ und $-3f + \sigma_1 + 2X_2$ über, während keine neuen merklichen Glieder hinzutreten.

Wir können also schreiben:

$$50)\qquad \begin{aligned} \sin i \cos \Sigma &= \sin j \cos \sigma + G, \qquad & G &= g \cos 3f + h \sin 3f, \\ \sin i \sin \Sigma &= \sin j \sin \sigma + H, \qquad & H &= g \sin 3f - h \cos 3f, \end{aligned}$$

$$50\mathrm{a})\qquad \left.\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right\} = (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_1 \sin j \,{\cos \atop \sin}\, (\sigma + 2X_2) + (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_2 \sin j' \,{\cos \atop \sin}\, (\sigma_1 + 2X_2),$$

wo numerisch

$$\begin{aligned} \log (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_1 &= 7{,}225, \\ \log (1+\tfrac{1}{2}\delta)\,\zeta_2 &= 7{,}225_n. \end{aligned}$$

5. Die Ausdrücke dieses Kapitels sind besonders zweckmäßig zur Aufstellung von Bewegungstafeln eines Planeten für einen längeren Jahrzehnte umfassenden Zeitraum. Will man dagegen nur einen einzigen heliozentrischen Ort berechnen, so kann die direkte Anwendung der Formen 22) bis 30) bequemer sein. Behält man bei stärker kommensurabeln Planeten die Funktion V in den Argumenten bei (Gl. 8a) bis 10a), 21a)), so wird man diese Funktion allerdings durch Näherungen berechnen müssen, welche aber sehr schnell zum Ziele führen und zwar weit schneller als z. B. die Lösung der Keplerschen Gleichung. Diese Näherungen sind also keineswegs beschwerlich und fallen auch bei den

gewöhnlichen Planeten ganz fort. Es mag bei dieser Gelegenheit erneut auf die Abhandlung von Herrn J. Kramer*) verwiesen werden, der die Einführung der Zeit als unabhängiger Veränderlicher ganz vermeidet und damit auch zu sehr brauchbaren Methoden gelangt.

Drittes Kapitel.

Berechnung der Bewegungstafeln.

1. Wir wollen nun zur Aufstellung der Bewegungstafeln übergehen, indem wir die Werte 23) und 29) für die Elemente zugrunde legen. Diese Tafeln sollen den Zeitraum 1860 bis 1910 umfassen, da wir sie zur Vergleichung sämtlicher beobachteten Oppositionen benutzen wollen.

Wir berechnen zunächst aus Gleichung 24) η und Π im Intervall von 10 Jahren und erhalten

Jan. 0,0	L	$\varepsilon L + \Gamma$	$\log \eta \cos \Pi$	$\log \eta \sin \Pi$	$\log \eta$	Π
1860	$-3427^\circ,33$	$98^\circ,445$	8,2202	9,02470	9,02997	$81^\circ,085$
1870	$-2563,68$	583	2140	02456	02969	208
1880	$-1700,27$	721	2076	02441	02940	331
1890	$-836,62$	859	2012	02426	02910	453
1900	$+26,79$	98,996	1947	02410	02881	575
1910	$+890,20$	99,134	8,1880	9,02395	9,02853	81,698

Ebenso berechnen wir j und σ aus Gl. 28):

Jan. 0,0	$\Theta - \tau L$	$\log \sin j \cos \sigma$	$\log \sin j \sin \sigma$	$\log \sin j$	σ
1860	$339^\circ,613$	8,56464	7,8751	8,57353	$11^\circ,553$
1870	483	56424	8698	57293	425
1880	352	56383	8644	57233	297
1890	222	56342	8589	57173	169
1900	339,092	56300	8533	57111	11,041
1910	338,962	8,56258	7,8477	8,57051	10,913

*) Kramer, Untersuchungen und Tafeln zur Theorie der kleinen Planeten vom Hekuba-Typus. Abhandlgn. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse. Neue Folge, Bd. II, Nr. 2, 1902.



Sodann wäre die Funktion X_2 und hierauf die Argumente $u, u_1, \mathfrak{u}, \mathfrak{u}_1$ nach Gl. 31) zu berechnen. Für unser Beispiel verschwindet die erstere und damit wird einfach:

$$u = \Pi, \qquad \mathfrak{u} = \sigma,$$
$$u_1 = \Pi_1, \qquad \mathfrak{u}_1 = \sigma_1.$$

2. Aus ihnen findet man jetzt die äußerst langsam veränderlichen Koeffizienten a, b, c, d, g, h, g', h' nach den Formeln 40), 41), 43), 47) und 50a). Indessen ändern sich nur die Koeffizienten $a_{0\cdot2}$ und $b_{0\cdot2}$ merklich in 50 Jahren, so daß wir die übrigen Koeffizienten während dieses ganzen Zeitraums als konstant ansehen können; es findet sich, wenn wir jetzt nicht Logarithmen, sondern zur besseren Uebersicht die Numeri geben und zwar in Einheit der 5. Stelle, welche dem Betrage von 2″,1 entspricht.

	$a_{0\cdot2}$	$b_{0\cdot2}$
1860	+465	+272
1870	466	271
1880	467	270
1890	469	268
1900	470	267
1910	+472	+266

	$a_{1\cdot1} = +9,$	
	$b_{1\cdot1} = -8,$	$b_{2\cdot1} = +84,$
	$a_{1\cdot2} = -152,$	$a_{2\cdot2} = +1,$
	$b_{1\cdot2} = +1,$	$b_{2\cdot2} = -2,$
$a_{2\cdot4} = -15,$		$a_{6\cdot2} = +5,$
$b_{2\cdot4} = -4,$	$b_{4\cdot2} = -135,$	$b_{6\cdot2} = -18,$
$a_{3\cdot3} = -234,$	$a_{4\cdot5} = +7,$	$a_{7\cdot2} = -5,$
$b_{3\cdot3} = +186,$	$b_{4\cdot5} = +1,$	$b_{7\cdot2} = -1,$
$a_{3\cdot0} = -3,$	$a_{5\cdot1} = +2,$	$a_{9\cdot2} = +3,$
$b_{3\cdot0} = +1,$	$b_{5\cdot1} = 0,$	$b_{9\cdot2} = +4,$
$a_{3\cdot-3} = 0,$	$a_{5\cdot4} = +6,$	$a_{10\cdot2} = +1,$
$b_{3\cdot-3} = +3,$	$b_{5\cdot4} = -6,$	$b_{10\cdot2} = -3,$
$c_{0\cdot0} = +3,$	$c_{2\cdot2} = -5,$	$c_{4\cdot5} = -3,$
	$d_{2\cdot2} = +1,$	$d_{4\cdot5} = -5,$
$c_{0\cdot2} = -24,$	$c_{2\cdot4} = +5,$	$c_{5\cdot4} = +4,$
$d_{0\cdot2} = -25,$	$d_{2\cdot4} = +7,$	$d_{5\cdot4} = -4,$
$c_{1\cdot2} = +2,$	$c_{3\cdot3} = -86,$	$c_{6\cdot2} = +20,$
$d_{1\cdot2} = +38,$	$d_{3\cdot3} = +113,$	$d_{6\cdot2} = -10,$
$c_{2\cdot1} = -29,$	$c_{4\cdot2} = +78,$	$c_{7\cdot2} = +2,$
		$d_{7\cdot2} = +11,$
$g_{3\cdot3} = -3,$	$g'_{3\cdot3} = +7,$	$g = +7,$
$h_{3\cdot3} = +7,$	$h'_{3\cdot3} = -2,$	$h = -3.$



3. Wir berechnen nunmehr das Argument f nach Gl. 31) und die Koeffizienten A, B, C, D, G, H, G', H' sowie die Funktion V nach den Formeln 38), 39), 46), 50) und 42). Es genügt die Rechnung im Intervall von zwei Jahren auszuführen und dann für jedes Jahr zu interpolieren. Man erhält folgende Werte für f:

Jan. 0,0	f	Jan. 0,0	f
1860	166°,53	1890	213°,47
62	169,66	92	216,60
64	172,79	94	219,73
66	175,92	96	222,86
68	179,05	98	225,99
1870	182,18	1900	229,14
72	185,30	02	232,28
74	188,44	04	235,37
76	191,56	06	238,50
78	194,69	08	241,63
1880	197,82	1910	244,76
82	200,95		
84	204,08		
86	207,21		
88	210,34		
1890	213,47		

und hieraus die Werte der A, B, C, D, G, H, die sich in der folgenden Tafel finden.

4. Des Weiteren wird man noch zur Erleichterung der Rechnung der Größen $a(1-\eta^2)$, $\sqrt{\dfrac{1+\eta}{1-\eta}}$, L, $\frac{1}{2}L$ etc. tabulieren, wie es in der Tafel geschehen ist. Ebenso wird man, falls man die Ausdrücke 50) benutzt, auch i und Σ direkt tabulieren (siehe ebenfalls die folgende Tafel).

In den Fällen, in denen die Größe $\Omega - \Sigma$ nicht, wie bei uns, verschwindet, wird man auch sie analog transformieren, wie wir es mit R und W durch die Gleichungen 33) bis 43) getan haben und die zu ihrer Berechnung nötigen Koeffizienten oder auch sie selbst tabulieren.

Jan. 0,0	L		$\frac{1}{3}L$	V
1860	172°,672	— 10 × 360°	297°,557	+ 0°,303
61	259,203	„ „	326,401	307
62	345,497	„ „	355,165	308
63	71,791	— 9 × 360°	23,930	308
64	158,084	„ „	52,695	306
65	244,615	„ „	81,538	301
66	330,909	„ „	110,303	294
67	57,203	— 8 × 360°	139,067	285
68	143,497	„ „	167,832	275
69	230,027	„ „	196,675	262
1870	316,321	„ „	225,440	+ 0,247
71	42,615	— 7 × 360°	254,205	232
72	128,909	„ „	282,969	215
73	215,439	„ „	311,813	196
74	301,733	„ „	340,577	176
75	28,027	— 6 × 360°	9,342	155
76	114,321	„ „	38,107	132
77	200,851	„ „	66,950	108
78	287,145	„ „	95,715	84
79	13,439	— 5 × 360°	124,479	59
1880	99,733	„ „	153,244	+ 0,034
81	186,263	„ „	182,088	+ 0,009
82	272,557	„ „	210,852	— 0,016
83	358,851	„ „	239,617	40
84	85,145	— 4 × 360°	268,381	65
85	171,675	„ „	297,225	89
86	257,969	„ „	325,990	113
87	344,263	„ „	354,754	136
88	70,557	— 3 × 360°	23,519	159
89	157,087	„ „	52,362	181
1890	243,381	„ „	81,127	— 0,201
91	329,675	„ „	109,892	219
92	55,969	— 2 × 360°	138,656	236
93	142,499	„ „	167,500	251
94	228,793	„ „	196,264	265
95	315,087	„ „	225,029	277
96	41,381	— 360°	253,794	288
97	127,911	„	282,637	297
98	214,205	„	311,402	303
99	300,499	— 360°	340,166	307
1900	26,793	—	8,931	— 0,309
01	113,087	—	37,696	309
02	199,381	—	66,460	307
03	285,675	—	95,225	304
04	11,969	+ 360°	123,990	299
05	98,499	„	152,833	291
06	184,793	„	181,598	281
07	271,087	„	210,362	269
08	357,381	„	239,127	256
09	83,911	+ 2 × 360°	267,970	241
1910	170,205	„ „	296,735	— 0,224

Monate	L Gemeinjahr	L Schaltjahr	⅓ L Gemeinjahr	⅓ L Schaltjahr
Februar 0,0	7°,3291	7°,3291	2°,443	2°,443
März 0,0	13,9489	14,1853	4,650	4,728
April 0,0	21,2780	21,5144	7,093	7,171
Mai 0,0	28,3706	28,6070	9,457	9,536
Juni 0,0	35,6997	35,9361	11,900	11,979
Juli 0,0	42,7923	43,0287	14,264	14,343
August 0,0	50,1214	50,3578	16,707	16,786
September 0,0	57,4505	57,6869	19,150	19,229
Oktober 0,0	64,5431	64,7795	21,514	21,593
November 0,0	71,8722	72,1086	23,957	24,036
Dezember 0,0	78,9648	79,2013	26,322	26,400

Tage	L	⅓ L
1	0°,2364	0°,079
2	0,4728	0,158
3	0,7093	0,236
4	0,9457	0,315
5	1,1821	0,394
6	1,4185	0,473
7	1,6550	0,552
8	1,8914	0,630
9	2,1278	0,709
10	2,3642	0,788
11	2,6006	0,867
12	2,8371	0,946
13	3,0735	1,024
14	3,3099	1,103
15	3,5463	1,182
16	3,7827	1,261
17	4,0192	1,340
18	4,2556	1,419
19	4,4920	1,497
20	4,7284	1,576
21	4,9649	1,655
22	5,2013	1,734
23	5,4377	1,813
24	5,6741	1,891
25	5,9105	1,970
26	6,1470	2,049
27	6,3834	2,128
28	6,6198	2,207
29	6,8562	2,285
30	7,0927	2,364
31	7,3291	2,443

Stunden	L	⅓ L
1	0°,0099	0°,003
2	0197	007
3	0296	010
4	0394	013
5	0493	016
6	0591	020
7	0690	023
8	0788	026
9	0887	030
10	0985	033
11	1084	036
12	1182	039
13	1281	043
14	1379	046
15	1478	049
16	1576	053
17	1675	056
18	1773	059
19	1872	062
20	1970	066
21	2069	069
22	2167	072
23	2266	076
24	0,2364	0,079

Minuten	L
10	0°,0016
20	0033
30	0049
40	0066
50	0082
60	0099
1	0,0002
2	0003
3	0005
4	0007
5	0008
6	0010
7	0011
8	0013
9	0,0015

Jan. 0,0	$\log \eta$	Π	$\log a(1-\eta^2)$	$\log \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}$	$\log \sin j$	σ
1860	9,02997	81°,085	0,40833	0,04671	8,57353	11°,553
1865	983	145	833	670	323	489
1870	969	208	834	668	293	425
1875	954	270	834	666	263	361
1880	940	331	834	665	233	297
1885	925	391	835	663	203	233
1890	910	452	835	662	173	169
1895	896	514	835	660	162	105
1900	881	575	836	659	111	11,041
1905	867	637	836	657	081	10,977
1910	9,02853	81,698	0,40836	0,04656	8,57051	10,913

Jan. 0,0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_9	A_{10}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_9	B_{10}	Jan. 0,0
1860	+34	−41	−165	−66	−5	+6	−2	−3	−1	−81	−18	+36	−36	+1	+9	+2	0	−1	1860
61	30	42	162	68	5	7	1	3	1	84	18	50	33	2	8	2	0	1	61
62	25	43	157	70	5	7	1	3	2	85	16	63	30	2	8	2	0	1	62
63	21	44	152	72	5	8	1	3	2	87	16	76	26	3	7	3	0	1	63
64	17	45	145	74	5	8	1	3	2	89	14	88	22	3	6	3	+1	1	64
65	12	46	137	75	5	9	1	3	2	90	13	100	18	4	6	3	1	1	65
66	8	47	129	76	4	9	1	2	2	91	12	111	14	4	5	3	1	1	66
67	+3	48	119	77	4	10	−1	2	2	91	10	122	10	5	4	3	1	1	67
68	−2	49	109	78	4	10	0	2	2	92	9	131	6	5	3	3	1	1	68
69	6	50	98	78	3	10	0	2	2	92	7	140	−1	5	3	3	2	−1	69
1870	−11	−51	−87	−79	−3	−10	0	−2	−2	−92	−6	+148	+3	+6	+2	+3	+2	0	1870
71	15	52	75	79	2	10	0	2	2	92	4	155	7	6	+1	3	2	0	71
72	20	53	62	78	2	11	0	2	2	91	−2	161	12	6	0	3	2	0	72
73	24	53	49	78	1	10	0	2	2	90	0	166	16	6	−1	3	2	0	73
74	29	54	36	77	−1	10	0	1	2	89	+2	170	21	6	2	3	2	0	74
75	33	54	22	76	0	10	+1	1	2	88	4	172	25	6	2	3	2	0	75
76	37	54	−9	75	0	10	1	1	2	86	6	174	29	6	3	3	2	0	76
77	41	54	+5	73	+1	10	1	1	2	84	8	174	34	6	4	3	3	0	77
78	45	54	19	71	2	9	1	−1	2	82	11	173	38	6	5	3	3	0	78
79	49	54	32	69	2	9	1	0	2	80	13	172	42	6	6	3	3	0	79
1880	−53	−54	+45	−67	+3	+8	+1	0	−2	−77	+15	+168	+46	+6	−6	+2	+3	+1	1880
81	56	54	58	64	3	8	1	0	2	74	17	164	50	5	7	2	3	1	81
82	60	53	71	61	3	7	2	0	2	72	20	160	53	5	8	2	3	1	82
83	63	52	84	58	3	7	2	0	2	68	22	154	57	5	8	2	3	1	83
84	66	52	95	55	4	6	2	+1	2	65	24	146	60	4	9	2	3	1	84
85	69	51	106	51	5	5	2	1	2	62	26	138	63	4	9	2	2	1	85
86	72	50	116	47	5	4	2	1	2	58	28	129	66	3	10	2	2	1	86
87	74	49	126	44	5	4	2	1	2	54	30	119	68	3	10	2	2	1	87
88	77	48	135	40	5	3	2	2	1	50	32	109	71	2	10	2	2	1	88
89	79	46	143	35	5	2	2	2	1	46	33	98	73	2	10	2	2	1	89
1890	−80	−45	+150	−31	+6	+1	+2	+2	−1	−42	+35	+86	+75	+1	−11	+2	+2	+1	1890
91	82	43	156	27	6	0	2	2	1	37	37	73	76	+1	11	1	2	1	91
92	84	41	161	22	5	0	3	2	1	33	38	60	78	0	11	1	2	2	92
93	85	40	165	18	5	−1	3	2	1	28	39	47	79	0	10	1	1	2	93
94	86	38	168	13	5	2	3	2	1	24	40	33	79	−1	10	1	1	2	94
95	86	36	170	9	5	3	3	2	1	19	42	19	80	1	10	1	1	2	95
96	86	34	170	−4	5	4	3	2	1	15	42	+5	80	2	10	+1	1	2	96
97	87	33	170	+1	4	5	3	3	1	10	43	−9	80	2	10	0	+1	2	97
98	86	31	168	5	4	6	3	3	−1	−5	44	23	80	3	9	0	0	2	98
99	86	29	166	10	4	6	3	3	0	0	44	37	79	3	9	0	0	2	99
1900	−85	−28	+162	+14	+3	−7	+3	+3	0	+4	+44	−50	+78	−3	−8	0	0	+2	1900
01	84	26	157	18	3	8	3	3	0	9	45	64	77	4	8	0	0	2	01
02	83	24	151	22	2	8	3	3	0	14	45	76	75	4	7	0	0	2	02
03	82	22	144	26	2	9	3	3	0	18	45	89	74	4	6	0	−1	2	03
04	80	21	136	30	1	9	3	2	0	23	45	100	72	4	6	−1	1	2	04
05	78	19	127	34	+1	10	3	2	0	27	45	111	70	4	5	1	1	2	05
06	76	18	117	38	0	10	3	2	0	32	45	122	67	4	4	1	1	2	06
07	74	16	107	41	0	10	3	2	0	36	44	131	65	4	3	1	1	2	07
08	71	15	96	45	−1	10	3	2	0	40	44	140	62	4	2	1	2	2	08
09	69	14	84	48	1	10	3	2	+1	44	44	148	60	3	−1	1	2	2	09
1910	−66	−13	+71	+51	−2	−11	+2	+2	+1	+48	+43	−154	+56	−3	0	−2	−2	+2	1910

Einheit: 0°,001.

Jan. 0,0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	G_3	H_3	G'_3	H'_3	log sin i	$\Omega = \Sigma$	
1860	−34	−16	+32	−39	−1	+20	+9	+6	−15	+21	+138	+66	+5	−8	+6	−7	−3	+3	−6	8,5728	11°,612	
61	35	15	43	35	−1	20	9	8	14	22	135	69	5	10	6	7	2	2	7	27	591	21
62	36	14	54	32	0	19	10	11	12	23	131	71	5	12	5	8	1	2	7	26	570	21
63	36	13	65	28	+1	18	10	14	10	24	126	73	5	13	5	8	−1	1	8	26	548	22
64	37	12	75	24	2	17	10	16	8	25	120	75	5	14	4	8	0	+1	8	25	527	21
65	38	11	85	20	2	15	10	19	6	26	114	77	5	16	4	8	+1	0	8	25	505	22
66	38	9	94	16	3	14	10	21	4	27	107	78	5	17	3	8	2	−1	7	24	483	22
67	38	8	102	11	3	13	11	24	−2	28	99	79	4	18	2	8	2	2	7	23	461	22
68	38	6	110	7	4	11	11	26	0	29	90	80	4	19	2	8	3	2	7	22	439	22
69	38	5	117	−2	4	9	11	28	+3	30	81	81	4	20	1	7	3	3	7	22	417	22
1870	−37	−3	+123	+3	+4	+8	+11	+30	+5	+31	+71	+81	+3	−21	+1	−7	+4	−3	−7	8,5721	11,395	22
71	37	−1	128	7	5	6	11	31	7	32	61	81	3	21	0	7	4	4	6	21	373	22
72	37	0	133	12	5	4	11	33	9	32	51	81	2	22	0	6	5	4	6	20	352	21
73	36	+2	136	17	5	3	11	34	11	33	40	80	2	22	−1	6	5	5	6	20	331	21
74	36	4	139	21	5	+1	11	35	13	33	28	79	+1	22	2	5	6	5	5	20	311	20
75	35	6	141	26	5	−1	11	36	14	33	17	78	0	22	2	5	6	6	5	20	291	20
76	34	8	142	31	5	3	10	36	16	34	+6	76	0	22	3	4	6	6	5	20	271	20
77	33	10	142	35	5	4	10	37	18	34	−6	75	−1	22	3	4	7	7	4	20	252	19
78	32	12	141	40	5	6	10	37	20	34	17	73	1	21	4	3	7	7	4	20	233	19
79	31	14	139	44	5	8	10	37	22	34	28	70	2	21	4	2	7	7	3	20	215	18
1880	−30	+16	+136	+48	+5	−10	+10	+37	+23	+33	−40	+68	−2	−20	−5	−2	+8	−8	−2	8,5720	11,198	17
81	28	17	133	52	5	11	9	36	25	33	50	65	3	19	5	−1	8	8	2	20	181	17
82	27	19	128	56	4	12	9	36	26	32	61	62	3	18	6	0	8	8	2	20	165	16
83	26	21	123	59	4	14	9	35	28	32	71	58	4	17	6	0	8	8	−1	20	150	15
84	24	22	117	62	4	15	8	34	29	31	81	54	4	16	7	+1	8	8	0	20	136	14
85	22	24	110	65	3	17	8	32	30	30	90	51	4	15	7	1	8	8	0	20	123	13
86	21	25	102	68	2	18	8	31	31	29	99	47	5	13	8	2	7	7	+1	20	111	12
87	19	26	94	70	2	19	7	29	32	28	107	44	5	12	8	2	7	7	1	20	098	13
88	17	28	85	73	2	20	7	27	33	28	114	38	5	10	8	3	7	7	2	20	086	12
89	15	29	76	74	+1	20	6	25	34	26	120	34	5	9	9	3	7	7	2	20	076	10
1890	−14	+30	+66	+76	0	21	+6	+23	+35	+26	−126	+29	−6	−7	−9	+4	+6	−7	+3	8,5720	11,066	10
91	12	30	55	77	0	21	5	20	36	24	131	25	5	5	9	4	6	6	3	20	057	9
92	10	31	44	79	−1	22	5	18	36	23	135	20	5	8	10	5	6	6	4	20	048	9
93	8	32	33	79	1	22	4	16	37	22	138	16	5	−2	10	5	5	6	4	20	040	8
94	6	32	22	80	2	22	4	13	37	21	140	11	5	0	10	6	5	5	5	20	032	8
95	4	32	+10	80	2	22	3	10	37	20	142	6	5	+2	10	6	4	5	5	20	025	7
96	−2	32	−1	80	3	22	2	8	38	19	142	+2	4	4	11	6	3	4	6	20	018	7
97	0	32	13	79	4	21	2	5	38	18	142	−3	4	5	11	7	3	4	6	19	012	6
98	+2	32	24	79	4	21	1	+2	38	16	140	7	4	7	11	7	3	4	6	19	006	6
99	4	32	36	78	4	20	+1	−1	37	15	138	11	3	9	11	7	2	3	6	19	11,001	5
1900	+6	+32	−47	+76	−5	−20	0	−4	+37	+14	−134	−16	−3	+10	−11	+8	+1	−2	+7	8,5719	10,996	5
01	8	31	58	75	5	18	0	6	36	14	130	20	2	12	11	8	+1	2	7	18	992	4
02	10	31	68	73	5	18	−1	9	36	13	125	24	2	14	11	8	0	−1	7	18	988	4
03	12	30	78	72	5	16	2	12	35	12	119	27	−1	15	11	8	0	0	7	17	984	4
04	14	30	88	70	5	15	2	14	35	11	112	31	0	16	11	8	−1	0	7	17	981	3
05	16	29	96	68	5	14	3	16	34	10	105	34	0	17	10	8	2	+1	7	17	978	3
06	18	28	105	65	5	12	3	19	33	10	97	38	+1	18	10	7	2	1	7	16	975	3
07	20	28	112	63	5	11	4	21	32	10	88	41	1	19	10	7	3	2	7	16	972	3
08	22	27	119	60	5	9	4	23	31	9	78	44	2	20	10	7	4	3	7	15	969	3
09	23	26	125	58	5	7	5	24	29	9	68	47	2	21	10	6	4	4	7	14	966	3
1910	+25	+25	−130	+55	−5	−6	−6	−26	+28	+9	−58	−50	+3	+21	−9	+6	−5	+4	+7	8,5718	10,962	4

Einheit: 5. Dezimale.

Viertes Kapitel.

Berechnung eines geozentrischen Ortes aus den Bewegungstafeln.

1. Die Berechnung eines geozentrischen Ortes des Planeten aus den Tafeln wird am besten durch ein Beispiel erläutert; wir wollen dazu den Ort der Aegina für 1882 August 12. $11^h 52^m,3$ M. Z. Berlin wählen. Man vergleiche Teil III, Kap. I.

Wir entnehmen aus den Tafeln die folgenden Werte:

$$
\begin{array}{llll}
A_1 = -62, & B_1 = -70, & & D_0 = +35, \\
A_2 = -52, & B_2 = +21, & C_1 = -26, & D_1 = +27, \\
A_3 = +79, & B_3 = +156, & C_2 = +20, & D_2 = +32, \\
A_4 = -59, & B_4 = +55, & C_3 = +125, & D_3 = -67, \\
A_5 = +3, & B_5 = +5, & C_4 = +58, & D_4 = +60, \\
A_6 = +7, & B_6 = -8, & C_5 = +4, & D_5 = -4, \\
A_7 = +2, & B_7 = +2, & C_6 = -13, & D_6 = -17, \\
A_9 = 0, & B_9 = +3, & C_7 = +9, & D_7 = -6, \\
A_{10} = -2, & B_{10} = +1, & &
\end{array}
$$

wo die A und B in Einheiten von $0^\circ,001$, die C und D dagegen in Einheiten der 5. Dezimale gegeben sind*). Weiter entnehmen wir:

$$
\begin{array}{lll}
L = 325^\circ,632, & \tfrac{1}{2}L = 228^\circ,544, & V = -0^\circ,031, \\
\log\eta = 9,02932, & \Pi = 81^\circ,362. &
\end{array}
$$

Wir haben sowohl L als $\frac{1}{2}L$ tabuliert, damit man bei der Entnahme aus den Tafeln eine Kontrolle hat.

Hieraus folgt nach den Relationen 33) und 34):

$$K = +0^\circ,075, \qquad R = -0,00129,$$

also $W = K + V = +0^\circ,044$.

Sodann wird

$$M = L - \Pi - W = 244^\circ,226$$

und aus

$$\varepsilon - \eta \sin\varepsilon = M \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

---

*) Weiter unten haben wir auch für die A und B die 5. Dezimale gewählt, da damit die Rechnung etwas schärfer wird.

findet sich*)

$$s = 238°,973, \qquad \mathrm{v} = v - \Pi = 233°,851, \qquad v = 315°,213.$$

Weiter hat man

$$\varrho = \eta \cos \mathrm{v} + R = (8,80891_n),$$

und aus

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho},$$

$$\log r = 0,43725.$$

2. Aus den gefundenen Koordinaten in der Bahnebene r und v berechnet man am bequemsten die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten für den Aequator durch Einführung der Gaußschen Konstanten; wir geben diese Formeln hier in etwas veränderter Gestalt, in der sie, namentlich bei kleinen Neigungen, eine bequemere und vor allem schärfere Rechnung ermöglichen. Herr stud. astr. Boda ist ebenfalls unabhängig auf die Verwendung der unten definierten Konstanten geführt worden und hat darüber in den Astron. Nachr. Bd. 185 eine Mitteilung gemacht. Man hat bekanntlich für die heliozentrischen Koordinaten für den Aequator:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Omega \cos u - r \cos i \sin \Omega \sin u, \\ y &= r \cos i \cos \Omega \cos \varepsilon \sin u + r \sin \Omega \cos \varepsilon \cos u - r \sin i \sin \varepsilon \sin u, \\ z &= r \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon \sin u + r \sin \Omega \sin \varepsilon \cos u + r \sin i \cos \varepsilon \sin u, \end{aligned} \tag{51}$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik und $u = v - \Sigma$ das Argument der Breite bedeutet. Setzt man:

$$\begin{aligned} a \sin (A + \Omega) &= \cos i \sin \Omega, \\ a \cos (A + \Omega) &= \cos \Omega, \\ b \sin (B + \Omega) &= \sin \Omega \cos \varepsilon, \\ b \cos (B + \Omega) &= \cos i \cos \Omega \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\ c \sin (C + \Omega) &= \sin \Omega \sin \varepsilon, \\ c \cos (C + \Omega) &= \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon, \end{aligned} \tag{52}$$

so wird:

$$\begin{aligned} x &= ar \cos (A + v + \Omega - \Sigma), \\ y &= br \sin (B + v + \Omega - \Sigma), \\ c &= cr \sin (C + v + \Omega - \Sigma). \end{aligned} \tag{53}$$

Zur Berechnung der Konstanten a, A, b, B, c, C kann man die folgenden Formeln anwenden

---

*) Statt der letzteren Gleichung bedient man sich besser der folgenden:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{v} - s) = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin s}{\sqrt{1 - \eta \cos s}},$$

welche eine schärfere Rechnung ermöglicht.

$$
54)\quad
\begin{aligned}
a \sin A &= -2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin \Omega \cos \Omega, \\
a \cos A &= 1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \Omega, \\
b \sin B &= 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos \Omega \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin i \sin \Omega \sin \varepsilon, \\
b \cos B &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \Omega\right) \cos \varepsilon - \sin i \cos \Omega \sin \varepsilon, \\
c \sin C &= 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos \Omega \sin \Omega \sin \varepsilon - \sin i \sin \Omega \cos \varepsilon, \\
c \cos C &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \Omega\right) \sin \varepsilon + \sin i \cos \Omega \cos \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ist die Neigung klein, so ist A klein, B und C nahe gleich Ω, a nahe gleich 1, b nahe gleich $\cos \varepsilon$, c nahe gleich $\sin \varepsilon$. Die Berechnung dieser Größen erfolgt am bequemsten, wie folgt, besonders, wenn man bereits im Besitze der Werte von $\sin i \cos \Sigma$ und $\sin i \sin \Sigma$ ist:

Man rechne

$$
k = \frac{\sin i \cos \Omega}{\sqrt{2} \cos \frac{i}{2}}, \qquad l = \frac{\sin i \sin \Omega}{\sqrt{2} \cos \frac{i}{2}},
$$

$$
55)\quad
\begin{aligned}
a_1 &= -kl, & b_1 &= \sin i \sin \Omega \sin \varepsilon, & c_1 &= -\sin i \sin \Omega \cos \varepsilon, \\
a_2 &= -l^2, & b_2 &= kl \cos \varepsilon, & c_2 &= kl \sin \varepsilon, \\
 & & b_3 &= -\sin i \cos \Omega \sin \varepsilon, & c_3 &= \sin i \cos \Omega \cos \varepsilon, \\
 & & b_4 &= -k^2 \cos \varepsilon, & c_4 &= -k^2 \sin \varepsilon
\end{aligned}
$$

und hat sodann

$$
56)\quad
\begin{aligned}
a \sin A &= a_1, & b \sin B &= b_1 + b_2, & c \sin C &= c_1 + c_2, \\
a \cos A &= 1 + a_2, & b \cos B &= \cos \varepsilon + b_3 + b_4, & c \cos C &= \sin \varepsilon + c_3 + c_4.
\end{aligned}
$$

Man braucht übrigens, wie Herr Boda bemerkt, die Konstanten a, A etc. nicht erst zu berechnen, sondern kann sich direkt der Formeln:

$$
57)\quad
\begin{aligned}
x &= a \cos A \,.\, r \cos (v + \Omega - \Sigma) - a \sin A \,.\, r \sin (v + \Omega - \Sigma), \\
y &= b \cos B \,.\, r \sin (v + \Omega - \Sigma) + b \sin B \,.\, r \cos (v + \Omega - \Sigma), \\
z &= c \cos C \,.\, r \sin (v + \Omega - \Sigma) + c \sin C \,.\, r \cos (v + \Omega - \Sigma)
\end{aligned}
$$

bedienen, was namentlich dann mit Vorteil geschieht, wenn man eine Rechenmaschine zur Hand hat.

Die Größen i und Σ entnimmt man direkt aus unseren Tafeln; ist Ω nicht gleich Σ, so wird man die Größe $\Omega - \Sigma$ ebenfalls tabuliert haben, wie R und K. In den meisten Fällen wird es zweckmäßig sein, die Konstanten für den Aequator direkt in die Tafeln aufzunehmen, wie wir es späterhin getan haben.

Unsere Tafeln ergeben

$$\log \sin i = 8{,}5720, \qquad \Omega = \Sigma = 11^\circ{,}156$$

und hiermit

$$\begin{aligned} \log a &= 9{,}99999, & A &= -0^\circ{,}007, & & \\ \log b &= 9{,}95530, & B &= +0^\circ{,}190, & u &= 304^\circ{,}057, \\ \log c &= 9{,}63484, & C &= -0^\circ{,}873 & & \end{aligned}$$

und endlich:

$$x = +1{,}94214, \qquad y = -1{,}73364, \qquad z = -0{,}84434.$$

3. Zur Berechnung der geozentrischen Koordinaten hat man nun aus dem astronomischen Jahrbuch die Sonnenkoordinaten X, Y, Z für den Aequator zu entnehmen, womit diese sich aus den bekannten Relationen:

$$\xi = x + X, \qquad \eta = y + Y, \qquad \zeta = z + Z \tag{58}$$

finden. Das Berliner Astronomische Jahrbuch für 1882 gibt uns die Sonnenkoordinaten für den mittleren Aequator und das mittlere Aequinoktium des Jahresanfangs (1882.0) sowie ihre Reduktion auf 1880.0. Wir erhalten so für diese letztere Epoche

$$X = -0{,}776220, \qquad Y = +0{,}596956, \qquad Z = +0{,}258997.$$

Da alle unsere Größen auf das Aequinoktium 1900.0 bezogen sind, so müssen auch diese Sonnenkoordinaten darauf reduziert werden. Bequeme Formeln zur Uebertragung rechtwinkliger Aequatorialkoordinaten von einem mittleren Aequinoktium auf ein anderes findet man nicht leicht in den Lehrbüchern; ich pflege die folgenden anzuwenden:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - mt \, . \, y_0 - nt \, . \, z_0 - \frac{m^2 + n^2}{2} t^2 \, . \, x_0 \, , \\ y_1 &= y_0 + mt \, . \, x_0 - \frac{m^2 t^2}{2} y_0 - \frac{mn}{2} t^2 \, . \, z_0 \, , \\ z_1 &= z_0 + nt \, . \, x_0 - \frac{mn}{2} t^2 \, . \, y_0 - \frac{n^2}{2} t^2 \, . \, z_0 \, , \end{aligned} \tag{59}$$

wo x_1, y_1, z_1 die Koordinaten zur Zeit t_1, x_0, y_0, z_0 zur Zeit t_0 sind und wo $t = t_1 - t_0$ sowie m und n die jährliche Präzession in Rektaszession und Deklination für die Zwischenzeit $\frac{t_0 + t_1}{2}$, wie üblich, bedeuten. Es findet sich so:

$$\left.\begin{aligned} X &= -0{,}77938, & Y &= +0{,}59348, & Z &= +0{,}25748 \\ \xi &= +1{,}16276, & \eta &= -1{,}14016, & \zeta &= -0{,}58686 \end{aligned}\right\} (1900{,}0)$$

(zwischen beiden Zeilen: „und“)

und nach den bekannten Formeln

$$
60)\qquad \begin{aligned} \xi &= \varDelta \cos\alpha\cos\delta, & \alpha &= 21^h\, 2^m\, 15^s{,}0 \\ \eta &= \varDelta \sin\alpha\cos\delta, & \delta &= -19^\circ 49' 3'' \\ \zeta &= \varDelta \sin\delta, & \log\varDelta &= 0{,}23829. \end{aligned} \quad (1900{,}0)
$$

4. Will man dagegen die Koordinaten l und b in bezug auf die Ekliptik haben, so wird man bis zur Berechnung von r und v, wie vorstehend, verfahren. Sodann entnehme man den Tafeln die Werte von G_3, H_3, $\sin j$, σ, $\sin i$, Σ, nämlich

$$
\begin{aligned} G_3 &= 0, & \log\sin j &= 8{,}57217, & \log\sin i &= 8{,}5720, & i &= 2^\circ{,}1379, \\ H_3 &= +8, & \sigma &= 11^\circ{,}263, & \Sigma &= 11^\circ{,}156. \end{aligned}
$$

Die Relation 44) gibt sodann

$$\mathfrak{Z} = +6{,}6$$

und weiter folgt

$$
61)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{v} &= v - \sigma = 303^\circ{,}950, \\ \sin b &= \mathfrak{z} = \sin j \sin\mathfrak{v} + \mathfrak{Z} = (8{,}49007_n), \\ b &= -1^\circ{,}7712 = -1^\circ 46' 16''. \end{aligned}
$$

Die Reduktion auf die Ekliptik $l - v$ ergibt die Relation (Teil III, Gl. 17)

$$
62)\qquad \sin(v - l) = \frac{\sin^2\frac{i}{2}}{\cos b}\sin 2(v - \Sigma),
$$

nämlich

$$v - l = -0^\circ{,}0185,$$

womit also

$$l = 315^\circ{,}230.$$

Will man Länge und Breite direkt nach den Formeln 18) des dritten Teils rechnen, so hat man aus unseren Tafeln nur die Größen $\sin i$ und $\Sigma = \Omega$ zu entnehmen und findet dieselben Werte für b und l.

5. Indessen kann sehr wohl, namentlich bei großen Neigungen der Fall eintreten, daß $\sin i$ und Σ sich nicht gut direkt tabulieren lassen. Dann wird man die Koeffizienten G_n, H_n, G'_n, H'_n — die in unserem Falle nur für $n = 3$ auftreten — aus den Tafeln entnehmen, aus ihnen nach den Relationen 44) — oder vielmehr den ihnen analogen vollständigen — $\mathfrak{Z}$ und $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ berechnen, worauf die Gleichungen (Teil III, Gl. 16)

$$
63)\qquad \begin{aligned} \sin i \cos\Sigma &= \sin j \cos\sigma + \mathfrak{Z}\sin v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos v, \\ \sin i \sin\Sigma &= \sin j \sin\sigma - \mathfrak{Z}\cos v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin v \end{aligned}
$$

die Größen i und Σ ergeben.

6. Ueberhaupt wird es von der Beschaffenheit der Elemente des Planeten und von dem erstrebten Genauigkeitsgrade abhängen, welche Größen etwa noch



in die Tafeln aufzunehmen sind. Es ist anzunehmen, daß jeder Rechner hier die seinem Zweck und seinem Geschmack zusagenden Modifikationen machen wird.

Es mag doch noch darauf hingewiesen werden, daß es bei der Ausführung einer gewissermaßen „definitiven Bahnbestimmung“, wie wir sie hier im Auge haben, sehr darauf ankommt, daß man sich vor Rechenfehlern schütze; es mag daher wohl empfohlen werden, die Berechnung der geozentrischen Oerter zur Kontrolle doppelt, einmal für den Aequator und einmal für die Ekliptik auszuführen.

Fünftes Kapitel.

Vergleichung der beobachteten Oerter mit der Rechnung.

1. Zur Vergleichung unserer Tafeln mit den Beobachtungen zum Zweck der Verbesserung der im dritten Teil gefundenen genäherten Elemente habe ich aus jeder beobachteten Opposition von Aegina eine Beobachtung herangezogen, da bei nur genäherter Darstellung der Bewegung die Bildung von Normalörtern sich nicht lohnt und aus vielen Oppositionen auch nur eine einzige Beobachtung vorlag. Der letztere Umstand ist recht bedauerlich, da man keine Möglichkeit hat, eine solche einzelne Beobachtung zu prüfen, besonders da die Beobachtungen zuweilen, wenn auch nicht durch direkte Beobachtungsfehler, so doch durch andere Umstände (Reduktionsfehler, Unsicherheit der Vergleichssterne), an Zuverlässigkeit zu wünschen übrig lassen.

Die Zuverlässigkeit, die die Beobachtungen durch die Bildung von Normalörtern erhalten, wird auch leicht überschätzt; man darf nicht vergessen, daß dadurch nur die zufälligen kleinen Fehler, und auch diese nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, eliminiert werden. Ganz ungerechtfertigt ist es aber, den Normalörtern ganz allgemein Gewichte zu erteilen, entsprechend der Anzahl der Beobachtungen, aus denen sie gebildet sind; eine einzige zuverlässige Beobachtung ist mehr wert, als ein Normalort aus vielen Beobachtungen von zweifelhaftem Werte.

Diese Betrachtungen wird man zu berücksichtigen haben, wenn man eine möglichst scharfe Darstellung der Bewegung eines Planeten durchführen will. Für unsere Zwecke genügt es, solche Beobachtungen zu verwenden, die keine groben aus irgend einer Fehlerquelle stammenden Differenzen zeigen.

Wichtig ist es dagegen, daß die benutzten Beobachtungen sich über einen möglichst langen Zeitraum erstrecken; es dürfte für die genäherte Rechnung am zweckmäßigsten sein, Beobachtungen zu benutzen, welche sich etwa über ein

halbes Jahrhundert erstrecken, um aus den hiermit verbesserten Elementen die Vorausberechnung für das nächste halbe Jahrhundert auszuführen. Vielleicht könnte man auch, falls Beobachtungen vorhanden sind, den Zeitraum länger wählen; indessen ist zu erwarten, daß infolge der Vernachlässigung sekularer (oder sehr langperiodischer) Glieder die Darstellung dann etwas schlechter wird. Die Vernachlässigung solcher sekularer Glieder, über deren absolute Größe man sich garnicht Rechenschaft geben kann (vgl. übrigens Kap. VIII des ersten Teils), wird dazu führen, daß die aus den Beobachtungen bestimmten Bahnelemente sehr langsame Aenderungen erleiden, und daß man mit konstanten Werten dieser Elemente nur während eines beschränkten Zeitraums, vielleicht etwa eines Jahrhunderts wird rechnen können. Man kann aber gewissermaßen von einer sekularen Variation der Elemente sprechen, indem man diese etwas verändert, wenn man für einen weiteren größeren Zeitabschnitt die Beobachtungen darstellen will. Da erst ganz wenige der kleinen Planeten seit einem Jahrhundert beobachtet sind, so erübrigt es sich, hier tiefer auf diese Frage einzugehen.

Wir werden nun in diesem Kapitel die Darstellung an der Hand unseres Beispieles Aegina geben, da wir doch sonst nichts sachlich Neues hier zu sagen haben.

Für diejenigen Oppositionen, aus denen mehrere Beobachtungen vorlagen, wurden alle diese mit der Rechnung verglichen, woraus sich eine Prüfung ihrer Zuverlässigkeit ergab; es wurde dann eine zuverlässige Beobachtung ausgewählt. Die mit einem Stern * bezeichneten Beobachtungen sind vereinzelte, konnten also nicht geprüft werden. Die von Herrn Max Wolf mir freundlichst mitgeteilten photographischen Beobachtungen sind zwar auch einzelne Beobachtungen; indessen kann bei der photographischen Methode die Messung beliebig nachgeprüft werden und für den Rechner werden solche Beobachtungen besonders wertvoll sein, da er über die Grenze ihrer Zuverlässigkeit ein ganz sicheres Urteil haben kann.

2. Die folgenden Beobachtungen (siehe S. 34 oben) umfassen sämtliche beobachteten Oppositionen der Aegina, soweit sie bekannt geworden sind. Die Beobachtung aus dem Jahre 1873 wurde indessen zur Elementenverbesserung nicht benutzt, da sie Abweichungen zeigt, welche auf ein Versehen bei der Beobachtung, oder bei der Reduktion, oder auch bei der Veröffentlichung schließen lassen; dasselbe gilt von der aus dem Jahre 1897, weil bei dieser ein gleiches Versehen, wahrscheinlich fälschlicherweise, vermutet wurde; auch die Heidelberger Beobachtung von 1902 wurde nicht mitbenutzt, da sie bei der Ausführung der Rechnung noch nicht fertig reduziert vorlag. Die Heidelberger Beobachtungen verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Max Wolf, der die Ausmessung der betreffenden Platten veranlaßte. Sie erfolgte durch die Herren J. Helffrich und E. Ernst.

3. Die Berechnung der Oerter für diese Beobachtungszeiten aus den Tafeln S. 23—26 erfolgte nach den Vorschriften des vorigen Kapitels und ergab die folgenden Werte (siehe S. 34 unten), wobei alle wichtigen Rechnungsdaten mit angeführt sein mögen:

Beobachtungsort und Beobachter	Mittlere Zeit Berlin		α app.	δ app.
		h m	h m s	° ′ ″
Berlin, Tietjen	1866 Nov. 22	6 4,8	1 33 33,61	+ 11 30 50,1
Clinton U. S. A., Peters	1872 März 2	15 18,0	10 9 45,37	+ 13 34 19,0
Washington (Nav. Obs.), Frisby	1873 Juni 20	16 16,1	[16 27 38,83]	[— 24 44 44,8]
Paris, Périgaud und Folain	1874 Sept. 30	10 58,7	23 5 46,65	— 6 55 10,6
Washington, Paul . . . . (M.)	1876 Febr. 2	17 49,2	8 50 1,08	+ 21 0 5,2
Leiden, Kapteyn	1877 Mai 16	11 55,0	15 44 44,48	— 22 18 28,7
Clinton U. S. A., Peters	1878 Aug. 30	20 14,4	22 7 5,15	— 13 53 15,5
Rom, Millosevich	1881 Mai 2	12 30,4	14 41 21,11	— 17 33 17,2
Dresden, v. Engelhardt	1882 Aug. 12	11 52,3	21 1 16,96	— 19 52 53,0
Wien-Währing, Oppenheim	1883 Dez. 22	11 37,6	5 4 8,12	+ 26 20 59,3
Berlin, Brendel	1891 Okt. 1	11 59,6	2 12 52,70	+ 14 15 52,4
Heidelberg, M. Wolf	1893 März 16	9 34,7	11 25 27,64 *)	+ 4 55 9,4 *)
Pola, v. Benko	1897 Febr. 27	11 20,9	10 7 7,29	+ 13 54 43,5
Heidelberg, M. Wolf	1902 Mai 7	13 36,7	15 53 4,71 *)	— 22 37 23,4 *)
" " "	1903 Sept. 1	12 53,1	22 5 54,75 *)	— 13 59 31,7 *)
" " "	1907 Aug. 13	10 51,4	21 0 14,69 *)	— 19 57 39,0 *)

(Fortsetzung auf folgender Seite)

Die Oerter sind für Parallaxe korrigiert; ebenso die Beobachtungszeiten für die Aberrationszeit.
(M) = Meridianbeobachtung.
*) Die photographischen Positionen beziehen sich auf den Jahresanfang.

	L	R	W	$\log \eta$	Π	v	$\log r$	$\log \sin i$	Ω	$\log x$	$\log y$
1866	48°,042	+ 0,00078	+ 0°,424	9,02977	81°,169	40°,011	0,37434	8,5723	11°,463	0,25856	0,13958
1872	143,718	+ 0,00108	— 0,008	962	235	155,244	0,39526	5720	11,348	0,35335$_n$	9,96934
1873	256,027	— 0,00112	+ 0,215	959	251	256,837	0,45790	5720	11,322	9,81555$_n$	0,40200$_n$
1874	6,384	+ 0,00179	+ 0,262	955	267	353,938	0,40540	5720	11,296	0,40295	9,37040$_n$
1876	122,298	+ 0,00092	— 0,174	951	283	131,411	0,37914	5720	11,269	0,19957$_n$	0,20821
1877	233,122	— 0,00100	— 0,010	947	298	238,301	0,45387	5720	11,245	0,17449$_n$	0,33991$_n$
1878	344,558	— 0,00067	+ 0,159	944	315	332,505	0,42389	5720	11,221	0,37180	0,04074$_n$
1881	215,230	+ 0,00078	— 0,105	936	347	223,377	0,44624	5720	11,175	0,30773$_n$	0,23989$_n$
1882	325,632	— 0,00129	+ 0,044	932	362	315,213	0,43725	5720	11,156	0,28828	0,23896$_n$
1883	83,132	+ 0,00192	+ 0,160	928	379	83,365	0,36348	5720	11,136	9,42667	0,31602
1891	34,573	— 0,00148	— 0,183	905	474	24,990	0,38405	5720	11,050	0,34138	9,96818
1893	160,325	+ 0,00136	— 0,097	900	493	172,668	0,40871	5720	11,038	0,40513$_n$	9,45868
1897	141,735	+ 0,00184	— 0,086	890	541	153,135	0,39316	5719	11,011	0,34352$_n$	0,00067
1902	229,541	+ 0,00061	— 0,479	875	604	235,766	0,45198	5718	10,987	0,20223$_n$	0,32562$_n$
1903	343,489	— 0,00036	— 0,506	871	621	332,156	0,42426	5717	10,982	0,37078	0,04626$_n$
1907	324,889	+ 0,00017	— 0,487	9,02859	81,668	314,627	0,43716	8,5715	10,970	0,28374	0,24336$_n$

(Fortsetzung auf folgender Seite unten)

Publikationsort	log Δ	Aberr. Zeit	Reduktion auf den Jahresanfang		Reduktion vom Jahresanfang auf 1900.0		Beobachtung, reduziert auf 1900.0	
		m	s	″	m s	′ ″	h m s	° ′ ″
A. N. Bd. 68	0,172	12,3	— 2,88	— 12,1	+ 1 48,18	+ 10 24,6	1 35 18,9	+ 11 41 3
A. N. Bd. 82	0,179	12,5	+ 0,44	— 3,8	+ 1 30,15	— 8 18,4	10 11 16,0	+ 13 25 57
A. N. Bd. 85	0,278	15,7	— 0,67	+ 6,3	+ 1 38,28	— 3 30,5	[16 29 16,4]	[— 24 48 9]
C. R. Bd. 79	0,202	13,3	— 1,88	— 9,4	+ 1 20,84	+ 8 27,0	23 7 5,6	— 6 46 53
A. N. Bd. 95	0,150	11,7	— 0,54	— 5,2	+ 1 22,76	— 5 26,1	8 51 23,3	+ 20 54 34
A. N. Bd. 107	0,263	15,2	— 1,59	+ 12,2	+ 1 21,18	— 4 15,4	15 46 4,1	— 22 22 32
A. N. Bd. 94	0,218	13,7	— 3,10	— 13,3	+ 1 10,99	+ 6 29,0	22 8 13,0	— 13 47 0
A. N. Bd. 100	0,252	14,8	— 2,21	+ 9,0	+ 1 3,60	— 4 49,8	14 42 22,5	— 17 37 58
A. N. Bd. 104	0,238	14,4	— 3,06	— 16,8	+ 1 1,39	+ 4 17,3	21 2 15,3	— 19 48 52
A. N. Bd. 109	0,128	11,1	— 4,33	+ 2,9	+ 1 3,15	+ 1 21,6	5 5 6,9	+ 26 22 24
A. N. Bd. 130	·0,173	12,4	— 1,39	— 10,5	+ 0 29,33	+ 2 30,8	2 13 20,6	+ 14 18 13
M. Wolf A 677 **)	0,196	13,1	—	—	+ 0 21,62	— 2 18,7	11 25 49,3	+ 4 52 51
A. N. Bd. 146	0,174	12,4	— 1,13	— 4,2	+ 0 9,69	— 0 53,0	10 7 15,8	+ 13 53 46
M. Wolf A 2566 **)	0,265	15,3	—	—	— 0 7,09	+ 0 21,1	15 52 57,6	— 22 37 2
„ „ A 3063 **)	0,219	13,7	—	—	— 0 9,70	— 0 52,8	22 5 45,0	— 14 0 24
„ „ B 1828 **)	0,238	14,4	—	—	— 0 23,90	— 1 39,2	20 59 50,8	— 19 59 18

A. N. = Astronomische Nachrichten.

C. R. = Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris.

**) Bei den Heidelberger photographischen Beobachtungen ist hier die Bezeichnung der Platte angegeben, da die genauen Positionen nicht veröffentlicht sind.

log s	X	Y	Z	log Δ	α	δ	Beobachtung minus Rechnung	
					h m s	° ′ ″	s	″
9,80910	— 0,48326	— 0,78959	— 0,34262	0,17205	1 35 35,2	+ 11 42 47	— 16,3	— 104
9,66635	+ 0,94991	— 0,26213	— 0,11373	0,17870	10 11 24,9	+ 13 24 53	— 8,9	+ 64
$0,07954_n$	— 0,00248	+ 0,93248	+ 0,40460	0,27792	16 30 19,2	— 24 49 55	(— 62,8)	(+ 106)
$9,12278_n$	— 0,99108	— 0,12642	— 0,05486	0,20163	23 7 9,1	— 6 46 11	— 3,5	— 42
9,89484	+ 0,68610	— 0,64943	— 0,28177	0,14952	8 51 34,6	+ 20 53 33	— 11,3	+ 61
$0,01436_n$	+ 0,55934	+ 0,77349	+ 0,33561	0,26321	15 46 4,3	— 22 22 53	— 0,2	+ 21
$9,73561_n$	— 0,93568	+ 0,34638	+ 0,15028	0,21825	22 8 16,1	— 13 46 51	— 3,1	— 9
$9,91079_n$	+ 0,73862	+ 0,63009	+ 0,27338	0,25184	14 42 21,0	— 17 37 57	+ 1,5	— 1
$9,92652_n$	— 0,77938	+ 0,59348	+ 0,25748	0,23829	21 2 15,0	— 19 49 3	+ 0,3	+ 11
9,90458	+ 0,01765	— 0,90211	— 0,39140	0,12777	5 5 12,2	+ 26 22 30	— 5,3	— 6
9,63035	— 0,98932	— 0,13712	— 0,05949	0,17275	2 13 15,3	+ 14 17 28	+ 5,3	+ 45
9,19760	+ 0,99380	— 0,05407	— 0,02346	0,19623	11 25 41,5	+ 4 53 53	+ 7,8	— 62
9,69574	+ 0,92935	— 0,31584	— 0,13702	0,17396	10 7 0,5	+ 13 55 37	+ 15,3	— 111
$9,99970_n$	+ 0,69534	+ 0,67140	+ 0,29126	0,26546	15 52 36,5	— 22 35 46	+ 21,1	— 76
$9,74058_n$	— 0,93741	+ 0,34222	+ 0,14847	0,21932	22 5 29,8	— 14 1 59	+ 15,2	+ 95
$9,93062_n$	— 0,77461	+ 0,59888	+ 0,25980	0,23824	20 59 29,3	— 20 1 12	+ 21,5	+ 114

Aus den gefundenen Differenzen Beobachtung — Rechnung haben wir nun unsere Bahnelemente zu verbessern und dazu vor allem die Differentialquotienten der geozentrischen Oerter nach diesen Elementen abzuleiten, was im folgenden Kapitel geschehen soll. Wir wollen aber in die Elementenverbesserung auch die Apsiden- und Knotenbewegung hineinziehen, um zu sehen, ob durch eine Verbesserung der für diese Größen rechnerisch gefundenen Werte die Darstellung der Beobachtungen eine bessere wird.

Sechstes Kapitel.

Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der Elemente.

1. Zur Verbesserung der Bahnelemente eines Planeten pflegt man die Ableitungen seines Ortes (gewöhnlich in Rektaszension und Deklination ausgedrückt) nach den Elementen zu rechnen und hiernach die Bedingungsgleichungen aufzustellen, aus denen man diese Verbesserungen in der Regel mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Auch wir wollen diesen Weg einschlagen, wobei indessen die gebräuchlichen Formeln wegen der Definition unserer Bahnelemente Modifikationen unterworfen sein werden.

Wir wollen zunächst die Korrektionen von Rektaszension und Deklination ausdrücken durch die von Radiusvektor, Länge in der Bahn, Neigung und Knotenlänge. Die hier geltenden Relationen unterscheiden sich zwar ihrer Natur nach nicht von den gewöhnlich gebrauchten, wir werden ihnen aber eine für unsere Zwecke besonders geeignete Form geben und darum ihre Ableitung vollständig durchführen. Auch werden wir besondere Rücksicht darauf nehmen, daß die Neigungen meist klein sind, was nicht immer in genügender Weise zu geschehen pflegt.

Indem wir für die heliozentrischen und geozentrischen Koordinaten die gleichen Bezeichnungen anwenden, wie im Vorigen, haben wir

$$\text{64)}\qquad \begin{aligned} \Delta \cos\alpha \cos\delta &= x + X, \\ \Delta \sin\alpha \cos\delta &= y + Y, \\ \Delta \sin\delta \quad\quad &= z + Z, \end{aligned}$$

woraus sich durch Differentiation und gehörige Transformation die bekannten Relationen

$$\text{65)}\qquad \begin{aligned} \Delta \cos\delta \,.\, d\alpha &= -\sin\alpha \,.\, dx + \cos\alpha \,.\, dy, \\ \Delta \,.\, d\delta &= -\cos\alpha \sin\delta \,.\, dx - \sin\alpha \,.\, \sin\delta \,.\, dy + \cos\delta \,.\, dz \end{aligned}$$

ergeben.

Andererseits erhalten wir aus den Relationen 53):

$$
66)\qquad
\begin{aligned}
x &= ar\cos(\bar{A}+v), & \bar{A} &= A+\Omega-\Sigma,\\
y &= br\sin(\bar{B}+v), & \bar{B} &= B+\Omega-\Sigma,\\
z &= cr\sin(\bar{C}+v), & \bar{C} &= C+\Omega-\Sigma
\end{aligned}
$$

die folgenden:

$$
67)\qquad
\begin{aligned}
dx &= a\cos(\bar{A}+v)\,.\,dr - ar\sin(\bar{A}+v)\,.\,d(v+\Omega-\Sigma)\\
&\quad + r\cos(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(a\cos A) - r\sin(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(a\sin A),\\
dy &= b\sin(\bar{B}+v)\,.\,dr + br\cos(\bar{B}+v)\,.\,d(v+\Omega-\Sigma)\\
&\quad + r\cos(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(b\sin B) + r\sin(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(b\cos B),\\
dz &= c\sin(\bar{C}+v)\,.\,dr + cr\cos(\bar{C}+v)\,.\,d(v+\Omega-\Sigma)\\
&\quad + r\cos(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(c\sin C) + r\sin(v+\Omega-\Sigma)\,.\,d(c\cos C).
\end{aligned}
$$

Nun erhält man aber aus den Gleichungen 54) durch Differentiation und gehörige Transformation:

$$
68)\qquad
\begin{aligned}
d(a\sin A) &= -\operatorname{tg} i\sin\Omega\cos\Omega\,.\,d\sin i - 2\sin^2\frac{i}{2}\cos 2\Omega\,.\,d\Omega,\\
d(a\cos A) &= -\operatorname{tg} i\sin^2\Omega\,.\,d\sin i - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin 2\Omega\,.\,d\Omega,\\
d(b\sin B) &= +\left\{\sin\varepsilon + \operatorname{tg} i\cos\varepsilon\cos\Omega\right\}\sin\Omega\, d\sin i\\
&\quad + \left\{\sin i\sin\varepsilon\cos\Omega + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varepsilon\cos 2\Omega\right\}d\Omega,\\
d(b\cos B) &= -\left\{\sin\varepsilon + \operatorname{tg} i\cos\varepsilon\cos\Omega\right\}\cos\Omega\, d\sin i\\
&\quad + \left\{\sin i\sin\varepsilon\sin\Omega + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varepsilon\sin 2\Omega\right\}d\Omega,\\
d(c\sin C) &= -\left\{\cos\varepsilon - \operatorname{tg} i\sin\varepsilon\cos\Omega\right\}\sin\Omega\, d\sin i\\
&\quad - \left\{\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\varepsilon\cos 2\Omega\right\}d\Omega,\\
d(c\cos C) &= +\left\{\cos\varepsilon - \operatorname{tg} i\sin\varepsilon\cos\Omega\right\}\cos\Omega\, d\sin i\\
&\quad - \left\{\sin i\cos\varepsilon\sin\Omega - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\varepsilon\sin 2\Omega\right\}d\Omega.
\end{aligned}
$$

Führt man sodann die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$
69)\qquad
\begin{aligned}
m\sin M &= b\sin(\bar{B}+v), & n\sin N &= b\cos(\bar{B}+v),\\
m\cos M &= -a\cos(\bar{A}+v), & n\cos N &= a\sin(\bar{A}+v),\\
p\sin P &= -(\sin\varepsilon + \operatorname{tg} i\cos\Omega\cos\varepsilon),\\
p\cos P &= -\operatorname{tg} i\sin\Omega,
\end{aligned}
$$

$$q \sin Q = b \cos(\overline{B}+v) + \sin i \sin \varepsilon \cos u + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos \varepsilon \cos(u - \Omega)$$

$$= \left\{\cos(u+\Omega) + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin \Omega \sin u\right\} \cos \varepsilon,$$

69) $$q \cos Q = a \sin(\overline{A}+v) - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin(u-\Omega) = \sin(u+\Omega) - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos \Omega \sin u,$$

$$g \sin G = \sin \varepsilon \cos u + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \varepsilon \cos(u - \Omega),$$

$$g \cos G = -\operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin(u - \Omega),$$

so wird:

70) $$dx = -m \cos M \,.\, dr - rn \cos N \,.\, dv - rp \cos P \sin u \,.\, d \sin i - rg \cos G \sin i \,.\, d\Sigma - rq \cos Q \,.\, d(\Omega - \Sigma),$$

$$dy = m \sin M \,.\, dr + rn \sin N \,.\, dv + rp \sin P \sin u \,.\, d \sin i + rg \sin G \sin i \,.\, d\Sigma + rq \sin Q \,.\, d(\Omega - \Sigma).$$

Setzt man weiter:

$$m' \sin M' = c \sin(\overline{C}+v), \qquad n' \sin N' = c \cos(\overline{C}+v),$$

$$m' \cos M' = m \cos(M+\alpha), \qquad n' \cos N' = n \cos(N+\alpha),$$

$$p' \sin P' = \cos \varepsilon - \operatorname{tg} i \sin \varepsilon \cos \Omega,$$

$$p' \cos P' = p \cos(P+\alpha),$$

71) $$q' \sin Q' = c \cos(\overline{C}+v) - \sin i \cos \varepsilon \cos u + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin \varepsilon \cos(u - \Omega)$$

$$= \left\{\cos(u+\Omega) + \sin^2 \frac{i}{2} \sin \Omega \sin u\right\} \sin \varepsilon,$$

$$q' \cos Q' = q \cos(Q+\alpha),$$

$$g' \sin G' = -\cos \varepsilon \cos u + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \varepsilon \cos(u - \Omega),$$

$$g' \cos G' = g \cos(G+\alpha),$$

so wird noch:

72) $$dz = m' \sin M' \,.\, dr + rn' \sin N' \,.\, dv + rp' \sin P' \sin u \,.\, d \sin i + rg' \sin G' \sin i \,.\, d\Sigma + rq' \sin Q' \,.\, d(\Omega - \Sigma)$$

und endlich:

73) $$\Delta \cos \delta \,.\, d\alpha = m \sin(M+\alpha) \,.\, dr + rn \sin(N+\alpha) \,.\, dv + rp \sin(P+\alpha) \sin u \,.\, d \sin i + rg \sin(G+\alpha) \sin i \,.\, d\Sigma + rq \sin(Q+\alpha) \,.\, d(\Omega - \Sigma),$$

$$\Delta \,.\, d\delta = m' \sin(M'+\delta) \,.\, dr + rn' \sin(N'+\delta) \,.\, dv + rp' \sin(P'+\delta) \sin u \,.\, d \sin i + rg' \sin(G'+\delta) \sin i \,.\, d\Sigma + rq' \sin(Q'+\delta) \,.\, d(\Omega - \Sigma).$$

2. Wir haben nun die Größen dr und dv zu entwickeln. Aus den Gleichungen (siehe S. 27)

$$\varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M^{*}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$$

erhalten wir analog den gleichen Formeln der elliptischen Bewegung

$$dM = (1 - \eta \cos \varepsilon)\, d\varepsilon - \sin \varepsilon\, d\eta,$$

$$\frac{d\varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{d\mathrm{v}}{\sin \mathrm{v}} - \frac{d\eta}{1-\eta^2},$$

also

$$dM = \frac{\sin \varepsilon (1 - \eta \cos \varepsilon)}{\sin \mathrm{v}} d\mathrm{v} - (2 - \eta \cos \varepsilon - \eta^2) \frac{\sin \varepsilon}{1-\eta^2} d\eta.$$

Da aber

$$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1 + \eta \cos \mathrm{v}} \sin \mathrm{v}, \qquad 1 - \eta \cos \varepsilon = \frac{1-\eta^2}{1+\eta \cos \mathrm{v}},$$

so wird

$$d\mathrm{v} = \frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} dM + \frac{(2 + \eta \cos \mathrm{v}) \sin \mathrm{v}}{1-\eta^2} d\eta. \tag{74}$$

Andererseits erhalten wir aus $r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos \mathrm{v} + R}$:

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{\eta \sin \mathrm{v}}{1+\varrho} d\mathrm{v} - \left(\frac{2\eta}{1-\eta^2} + \frac{\cos \mathrm{v}}{1+\varrho}\right) d\eta - \frac{dR}{1+\varrho},$$

also

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2 \eta \sin \mathrm{v}}{(1+\varrho)(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} dM - \frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2 \cos \mathrm{v} + 2\eta R}{(1+\varrho)(1-\eta^2)} d\eta - \frac{dR}{1+\varrho}. \tag{75}$$

Setzen wir also, da $\mathrm{v} = v - \Pi$,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= \frac{da}{a} + p_1 \eta\, dM + p_2\, d\eta + p_3\, dR, \\ dv &= q_1\, dM + q_2\, d\eta + d\Pi, \end{aligned} \tag{76}$$

so ist, wenn wir auch gleich die später gebrauchte Größe q_3 einführen:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2 \sin \mathrm{v}}{(1+\varrho)(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} = -p_3 q_1 \sin \mathrm{v}, & q_1 &= \frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 - q_3 \eta, \\ p_2 &= -\frac{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2 \cos \mathrm{v} + 2\eta R}{(1+\varrho)(1-\eta^2)}, & q_2 &= \frac{(2+\eta \cos \mathrm{v}) \sin \mathrm{v}}{1-\eta^2}, \\ p_3 &= -\frac{1}{1+\varrho}, & q_3 &= \frac{1}{\eta}(1 - q_1). \end{aligned} \tag{77}$$

Bei sehr kleinen Exzentrizitäten ist es vorteilhaft, q_3 nach Potenzen von η zu entwickeln und aus dieser Größe dann q_1 zu berechnen; man hat mit Fort-

---

*) Eine Verwechslung der hier mit ε bezeichneten Größe, welche der exzentrischen Anomalie analog ist, mit der Schiefe der Ekliptik in der vorigen Nr. ist wohl kaum zu befürchten.

lassung der 7. Potenzen von η:

78)
$$q_3 = -\frac{2\cos \mathrm{v} + (\frac{3}{2} + \cos^2 \mathrm{v})\,\eta - \frac{3}{8}\eta^3 - \frac{1}{16}\eta^5}{(1-\eta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

In den Gleichungen für dr und dv haben wir zu setzen:

79)
$$dM = dL - dW - d\Pi$$

und die Größen dR und dW werden ebenfalls durch die Bahnelemente auszudrücken sein, falls man sie nicht vernachlässigen will; im allgemeinen wird man dR vernachlässigen können und in dW nur die allergrößten Glieder berücksichtigen. Wir wollen hier in beiden Größen die hauptsächlichsten Glieder mitnehmen und damit auch Anhaltspunkte geben, wie man noch weitere Glieder hinzuziehen kann, wenn man es wünschen sollte*), dabei beziehen wir uns gleich auf unser numerisches Beispiel Aegina.

In R berücksichtigen wir die beiden Glieder:

80)
$$\text{pars } R = \beta_1 \eta \cos(3\psi - \varphi) + \beta_2 \eta' \cos(3\psi - \varphi_1),$$

wo

81)
$$\psi = (1-\mu)L - B = L - n'(t - t_0) - \Lambda', \qquad \log \beta_1 = 8{,}113,$$
$$\varphi = L - \Pi, \qquad \log \beta_2 = 8{,}356_n$$

und wo β_1 und β_2 den Divisor δ enthalten, auf dessen Korrektion wir auch Rücksicht nehmen wollen. Es wird

82)
$$\begin{aligned} dR = &-2\{\beta_1 \eta \sin(3\psi - \varphi) + \beta_2 \eta' \sin(3\psi - \varphi_1)\} \cdot dL \\ &+ \beta_1 \cos(3\psi - \varphi) \,.\, d\eta - \beta_1 \eta \sin(3\psi - \varphi) \,.\, d\Pi \\ &- \frac{1}{\delta}\{\beta_1 \eta \cos(3\psi - \varphi) + \beta_2 \eta' \cos(3\psi - \varphi_1)\} \cdot d\delta. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns der oben (S. 16—17) eingeführten Bezeichnungen

83)
$$\left.\begin{matrix} c_{3.3} \\ d_{3.3} \end{matrix}\right\} = \beta_1 \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u + \beta_2 \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u_1,$$
$$\left.\begin{matrix} C_3 \\ D_3 \end{matrix}\right\} = c_{3.3} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, 3f \mp d_{3.3} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, 3f$$

und führen die analogen

84)
$$\left.\begin{matrix} c'_{3.3} \\ d'_{3.3} \end{matrix}\right\} = \beta_1 \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u,$$
$$\left.\begin{matrix} C'_3 \\ D'_3 \end{matrix}\right\} = c'_{3.3} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, 3f \mp d'_{3.3} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, 3f$$

ein. Wenn wir weiter bedenken, daß

---

*) Siehe übrigens die schon früher zitierte Abhandlung von Kramer in den Abhandlgn. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse; Neue Folge, Bd. V, Nr. 3, (1907), S. 61—63.

$$\delta = 1-3\mu = 1-3\frac{n'}{n},$$

also

85) $$d\delta = 3\mu\frac{dn}{n},$$

so können wir schreiben:

86) $$dR = p_1' dL + p_2' d\eta + p_3' \eta\, d\Pi + p_4' \frac{dn}{n},$$

wo

87) $$\begin{aligned} p_1' &= 2(C_3 \cos L - D_3 \sin L), & p_3' &= \frac{1}{\eta}(C_3' \cos L - D_3' \sin L),\\ p_2' &= \frac{1}{\eta}(C_3' \sin L + D_3' \cos L), & p_4' &= -\frac{3\mu}{\delta}(C_3 \sin L + D_3 \cos L). \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise haben wir

$$dW = dK + dV$$

und wir berücksichtigen

88) $$\text{pars } K = \gamma_1 \eta \sin(3\psi-\varphi) + \gamma_2 \eta' \sin(3\psi-\varphi_1),$$

89) $$\text{pars } V = \varepsilon_5 \eta^2 \sin(3\psi-2\varphi) + \varepsilon_6 \eta\eta' \sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) + \varepsilon_7 \eta'^2 \sin(3\psi-2\varphi_1),$$

wo

$$\begin{aligned} \log\gamma_1 &= 8{,}424_n, & \log\varepsilon_5 &= 9{,}5054^{*}),\\ \log\gamma_2 &= 8{,}674, & \log\varepsilon_6 &= 0{,}0543_n,\\ & & \log\varepsilon_7 &= 9{,}241. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten γ_1 und γ_2 enthalten den Divisor δ, und $\varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ den Divisor δ^2; es wird also:

90) $$\begin{aligned} dK = {} & 2\{\gamma_1 \eta \cos(3\psi-\varphi) + \gamma_2 \eta' \cos(3\psi-\varphi_1)\} dL\\ & + \gamma_1 \sin(3\psi-\varphi)\, d\eta + \gamma_1 \eta \cos(3\psi-\varphi)\, d\Pi\\ & - \frac{1}{\delta}\{\gamma_1 \eta \sin(3\psi-\varphi) + \gamma_2 \eta' \sin(3\psi-\varphi_1)\} d\delta, \end{aligned}$$

91) $$\begin{aligned} dV = {} & \{\varepsilon_5 \eta^2 \cos(3\psi-2\varphi) + \varepsilon_6 \eta\eta' \cos(3\psi-\varphi-\varphi_1) + \varepsilon_7 \eta'^2 \cos(3\psi-2\varphi_1)\} dL\\ & + \{2\varepsilon_5 \eta \sin(3\psi-2\varphi) + \varepsilon_6 \eta' \sin(3\psi-\varphi-\varphi_1)\} d\eta\\ & + \{2\varepsilon_5 \eta^2 \cos(3\psi-2\varphi) + \varepsilon_6 \eta\eta' \cos(3\psi-\varphi-\varphi_1)\} d\Pi\\ & - \frac{2}{\delta}\{\varepsilon_5 \eta^2 \sin(3\psi-2\varphi) + \varepsilon_6 \eta\eta' \sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) + \varepsilon_7 \eta'^2 \sin(3\psi-2\varphi_1)\} d\delta. \end{aligned}$$

---

1) Mit $\varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ haben wir eigentlich die entsprechenden Koeffizienten in der Entwicklung nach den Argumenten w, v, v_1 (Gl. 49 des dritten Teils) bezeichnet; die Differenz ist indessen unerheblich und kann nicht zu Mißverständnissen führen.



Erinnern wir uns wieder der Bezeichnungen S. 16—18, wo aber noch einige weiteren Glieder berücksichtigt sind:

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot3} \\ b_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = \gamma_1 \eta \frac{\sin}{\cos} u + \gamma_2 \eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

92)
$$\left.\begin{matrix} a_{0\cdot3} \\ b_{0\cdot3} \end{matrix}\right\} = -\varepsilon_5 \eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u - \varepsilon_6 \eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) - \varepsilon_7 \eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} A_3 \\ B_3 \end{matrix}\right\} = a_{3\cdot3} \frac{\sin}{\cos} 3f \pm b_{3\cdot3} \frac{\cos}{\sin} 3f,$$

und setzen wir noch

$$\left.\begin{matrix} a'_{3\cdot3} \\ b'_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = \gamma_1 \eta \frac{\sin}{\cos} u,$$

$$\left.\begin{matrix} a'_{0\cdot3} \\ b'_{0\cdot3} \end{matrix}\right\} = -2\varepsilon_5 \eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u - \varepsilon_6 \eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1),$$

93)
$$\left.\begin{matrix} A'_3 \\ B'_3 \end{matrix}\right\} = \pm a'_{3\cdot3} \frac{\sin}{\cos} 3f + b'_{3\cdot3} \frac{\cos}{\sin} 3f,$$

$$A_0 = -a_{0\cdot3} \sin 3f - b_{0\cdot3} \cos 3f,$$

$$\left.\begin{matrix} A'_0 \\ B'_0 \end{matrix}\right\} = \mp a'_{0\cdot3} \frac{\sin}{\cos} 3f - b'_{0\cdot3} \frac{\cos}{\sin} 3f,$$

so wird:

94)
$$dW = q'_1\, dL + q'_2\, d\eta + q'_3\, \eta d\Pi + q'_4 \frac{dn}{n},$$

wo

95)
$$q'_1 = A_0 + 2(A_3 \cos L - B_3 \sin L), \qquad q'_2 = \frac{1}{\eta}(A'_0 + A'_3 \cos L + B'_3 \sin L),$$
$$q'_3 = \frac{1}{\eta}(-B'_0 + A'_3 \sin L - B'_3 \cos L), \qquad q'_4 = -\frac{3\mu}{\delta}(2V + A_3 \sin L + B_3 \cos L).$$

Setzen wir nun endlich die Ausdrücke 86), 94) und 79) in 76) ein, und bedenken, daß $\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\frac{dn}{n}$, so kommt:

96)
$$\frac{dr}{r} = (-\tfrac{2}{3} - p_1 q'_4 \eta + p_3 p'_4)\frac{dn}{n} + \{p_1 \eta (1 - q'_1) + p_3 p'_1\} dL + \{p_2 - p_1 q'_2 \eta + p_3 p'_2\} d\eta$$
$$+ \{-p_1(1 + q'_3 \eta) + p_3 p'_3\} \eta d\Pi,$$
$$dv = -q_1 q'_4 \frac{dn}{n} + q_1(1 - q'_1) dL + (q_2 - q_1 q'_2) d\eta + (q_3 - q_1 q'_3) \eta d\Pi.$$

Die Koeffizienten von $\frac{dn}{n}$, dL, $d\eta$, $\eta d\Pi$ sind zu berechnen und die Größen C'_3, D'_3, A'_3, B'_3 etc. können auch gleich in die Bewegungstafeln aufgenommen werden. Die für dr und dv gefundenen Ausdrücke setzt man in 73) ein und erhält sodann $\cos\delta . da$ und $d\delta$ ausgedrückt durch $\frac{dn}{n}$, dL, $d\eta$, $\eta d\Pi$, $d \sin i$, $\sin i d\Sigma$ und $d(\Omega - \Sigma)$.



3. Diese Ausdrücke sind dann noch weiter zu transformieren, indem man die Korrektionen $d\eta$ und $\eta d\Pi$ durch die von $\varkappa$ und Γ und die Korrektionen $d\sin i$ und $\sin i\,.\,d\Sigma$ durch die von $\sin\iota$ und Θ ausdrückt.

Man hat zunächst:

$$
\begin{aligned}
d\eta &= \sin\Pi\,.\,d(\eta\sin\Pi)+\cos\Pi\,.\,d(\eta\cos\Pi),\\
\eta\,.\,d\Pi &= \cos\Pi\,.\,d(\eta\sin\Pi)-\sin\Pi\,.\,d(\eta\cos\Pi)
\end{aligned}
\tag{97}
$$

und sodann durch Differentiation von

$$
\eta\,{}^{\cos}_{\sin}\,\Pi = \varkappa\,{}^{\cos}_{\sin}\,(\varsigma L+\Gamma)+\varkappa_1\,{}^{\cos}_{\sin}\,\Gamma_1
\tag{98}
$$

die Relationen:

$$
\begin{aligned}
d(\eta\cos\Pi) &= \cos\varsigma L\,.\,d(\varkappa\cos\Gamma)-\sin\varsigma L\,.\,d(\varkappa\sin\Gamma)-\varkappa\sin(\varsigma L+\Gamma)\,.\,Ld\varsigma,\\
d(\eta\sin\Pi) &= \sin\varsigma L\,.\,d(\varkappa\cos\Gamma)+\cos\varsigma L\,.\,d(\varkappa\sin\Gamma)+\varkappa\cos(\varsigma L+\Gamma)\,.\,Ld\varsigma
\end{aligned}
\tag{99}
$$

in denen wir die in allen Fällen sehr kleine Größe ςdL vernachlässigt, dagegen die Korrektion $d\varsigma$ mit berücksichtigt haben für den Fall, daß man auch die Apsidenbewegung ς aus den Beobachtungen zu korrigieren wünscht. Man kann die letzteren Gleichungen kombinieren und hat dann

$$
\begin{aligned}
d\eta &= \cos(\Pi-\varsigma L).d(\varkappa\cos\Gamma)+\sin(\Pi-\varsigma L).d(\varkappa\sin\Gamma)+\varkappa\sin(\Pi-\Gamma-\varsigma L).Ld\varsigma,\\
\eta d\Pi &= -\sin(\Pi-\varsigma L).d(\varkappa\cos\Gamma)+\cos(\Pi-\varsigma L).d(\varkappa\sin\Gamma)+\varkappa\cos(\Pi-\Gamma-\varsigma L).Ld\varsigma.
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Etwas weniger einfach ist die Transformation von $d\sin i$ und $\sin i\,.\,d\Sigma$; man hat zunächst

$$
\begin{aligned}
d\sin i &= \cos\Sigma\,.\,d(\sin i\cos\Sigma)+\sin\Sigma\,.\,d(\sin i\sin\Sigma),\\
\sin i\,.\,d\Sigma &= -\sin\Sigma\,.\,d(\sin i\cos\Sigma)+\cos\Sigma\,.\,d(\sin i\sin\Sigma).
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Weiter ist (siehe S. 19)

$$
\begin{aligned}
&\sin i\cos\Sigma = \sin j\cos\sigma+G, \qquad \left.\begin{matrix}G\\H\end{matrix}\right\} = g\,{}^{\cos}_{\sin}\,3f\pm h\,{}^{\sin}_{\cos}\,3f,\\
&\sin i\sin\Sigma = \sin j\sin\sigma+H,\\
&\left.\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right\} = (7{,}225)\sin j\,{}^{\cos}_{\sin}\,\sigma-(7{,}225)\sin j'\,{}^{\cos}_{\sin}\,\sigma_1.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Will man die Größen G und H hier nicht vernachlässigen, so bildet man

$$
\begin{aligned}
d(\sin i\cos\Sigma) &= d(\sin j\cos\sigma)+3(-g\sin 3f+h\cos 3f)df+\cos 3f\,.\,dg+\sin 3f\,.\,dh,\\
d(\sin i\sin\Sigma) &= d(\sin j\sin\sigma)+3(+g\cos 3f+h\sin 3f)df+\sin 3f\,.\,dg-\cos 3f\,.\,dh,
\end{aligned}
\tag{103}
$$

$$
\begin{aligned}
dg &= (7{,}225)\,d(\sin j\cos\sigma),\\
dh &= (7{,}225)\,d(\sin j\sin\sigma),
\end{aligned}
\tag{104}
$$

also, da

$$
f = -\frac{\vartheta}{3}L+B = -\tfrac{1}{3}L+\Lambda'+\mu(L-\Lambda) = -\tfrac{1}{3}L+\Lambda'+n'(t-t_0),
$$

und also $df = -\frac{1}{3}dL$:

$$105)\quad \begin{aligned} d(\sin i\cos\Sigma) &= \{1+(7{,}225)\cos 3f\}\,d(\sin j\cos\sigma)+(7{,}225)\sin 3f\,.\,d(\sin j\sin\sigma)\\ &\qquad +(g\sin 3f-h\cos 3f)\,dL,\\ d(\sin i\sin\Sigma) &= \{1-(7{,}225)\cos 3f\}\,d(\sin j\sin\sigma)+(7{,}225)\sin 3f\,.\,d(\sin j\cos\sigma)\\ &\qquad -(g\cos 3f+h\sin 3f)\,dL.\end{aligned}$$

Den Faktor von dL, der übrigens meist verschwindend klein ist, vereinigt man mit dem bereits in $\cos\vartheta\,.\,d\alpha$ und $d\vartheta$ vorkommenden Ausdruck in dL und im übrigen transformiert man $d(\sin j\cos\sigma)$ und $d(\sin j\sin\sigma)$ durch Differentiation der Relationen

$$106)\quad \sin j\,{\cos\atop\sin}\,\sigma = \sin\iota\,{\cos\atop\sin}\,(\Theta-\tau L)+\sin\iota_1\,{\cos\atop\sin}\,\Theta_1,$$

womit man, analog 99), erhält:

$$107)\quad \begin{aligned} d(\sin j\cos\sigma) &= \cos\tau L.d(\sin\iota\cos\Theta)+\sin\tau L.d(\sin\iota\sin\Theta)+\sin\iota\sin(\Theta-\tau L).Ld\tau,\\ d(\sin j\sin\sigma) &= -\sin\tau L.d(\sin\iota\cos\Theta)+\cos\tau L.d(\sin\iota\sin\Theta)-\sin\iota\cos(\Theta-\tau L).Ld\tau,\end{aligned}$$

wo wir $d\tau$ aus dem gleichen Grunde beibehalten haben, wie oben $d\varrho$.

Nach Ausführung aller erwähnten Transformationen und nach Einsetzung der berechneten Werte in die Ausdrücke für $\cos\vartheta\,.\,d\alpha$ und $d\vartheta$ erhält man diese Größen ausgedrückt durch dn, dL, $d(\varkappa\cos\Gamma)$, $d(\varkappa\sin\Gamma)$, $d(\sin\iota\cos\Theta)$, $d(\sin\iota\sin\Theta)$, $d\varrho$ und $d\tau$. Es erübrigt nur noch, dL zu transformieren. Aus

$$108)\quad L = n(t-t_0)+\Delta$$

hat man

$$109)\quad dL = tdn+d\Delta,$$

worauf dann $\cos\vartheta\,.\,d\alpha$ und $d\vartheta$ schließlich vollständig durch die Korrektionen der Bahnelemente ausgedrückt sind.

In den meisten Fällen wird man, wie schon bemerkt, dR vernachlässigen können und in dW nur die größten Glieder berücksichtigen, also die Koeffizienten p_1', p_2', p_3', p_4' ganz und in den Formeln für die q' die Größen A_2, B_2, A_2', B_2' unterdrücken. Sind die Differenzen Beobachtung — Rechnung bereits sehr klein, so wird man natürlich noch summarischer vorgehen können. Vielleicht ist es überhaupt empfehlenswert, bei der Ermittlung der Differentialquotienten an Rechnung zu sparen und dafür, wenn nötig, die Verbesserung der Elemente zu wiederholen; doch hängt das vom Geschmack der einzelnen Rechners ab.

4. Wir geben im folgenden einige Einzelheiten der Rechnung wieder; nämlich die den Relationen 73) und 96) entsprechenden numerischen Werte, die bei einer etwaigen Wiederholung der Ausgleichung von Nutzen sein können. Doch ist hier zu bemerken, daß in diesen Werten die Koeffizienten p_4' und q_4' unberücksichtigt geblieben sind.

1866	$\cos\delta . d\alpha$ =	(9,1747) dr	+ (0,1519) dv	− (9,4811) $d \sin i$	+ (9,7240) $\sin i\, d\Sigma$
1872	„ =	(8,7280) „	+ (0,1810) „	+ (9,5675) „	+ (9,6792) „
1873	„ =	(8,8179) „	+ (0,1700) „	− (9,3731) „	+ (8,9021) „
1874	„ =	(8,9366) „	+ (0,1570) „	+ (9,3003) „	+ (9,7864) „
1876	„ =	(8,2552) „	+ (0,2106) „	+ (9,6265) „	+ (9,3328) „
1877	„ =	− (7,882) „	+ (0,1774) „	− (9,4430) „	+ (9,3613) „
1878	„ =	(8,4796) „	+ (0,1716) „	+ (9,5794) „	+ (9,6488) „
1881	„ =	− (6,45) „	+ (0,1691) „	− (9,4429) „	+ (9,6153) „
1882	„ =	(8,4098) „	+ (0,1775) „	+ (9,5988) „	+ (9,3804) „
1883	„ =	(8,8721) „	+ (0,2309) „	− (9,2530) „	+ (8,408) „
1891	„ =	− (9,0752) „	+ (0,1722) „	− (9,1549) „	+ (9,7383) „
1893	„ =	(8,3729) „	+ (0,1688) „	+ (9,3402) „	+ (9,8001) „
1897	„ =	(8,6418) „	+ (0,1849) „	+ (9,5835) „	+ (9,6664) „
1902	„ =	− (8,6562) „	+ (0,1727) „	− (9,4084) „	+ (9,3565) „
1903	„ =	(8,5285) „	+ (0,1711) „	+ (9,5767) „	+ (9,6443) „
1907	„ =	(8,4262) „	+ (0,1781) „	+ (9,5955) „	+ (9,3695) „

1866	$d\delta$ =	(8,7107) dr	+ (9,7938) dv	+ (9,8444) $d \sin i$	− (0,1126) $\sin i\, d\Sigma$
1872	„ =	− (8,478) „	− (9,7939) „	+ (9,9530) „	+ (0,0942) „
1873	„ =	− (7,002) „	− (9,4165) „	− (0,1328) „	+ (9,7944) „
1874	„ =	(8,6099) „	+ (9,8199) „	− (9,6365) „	− (0,1458) „
1876	„ =	− (8,334) „	− (9,6881) „	+ (0,1478) „	+ (9,9164) „
1877	„ =	(8,008) „	− (9,5776) „	− (0,0421) „	+ (0,0137) „
1878	„ =	(8,311) „	+ (9,7813) „	− (9,9687) „	− (0,0688) „
1881	„ =	(7,829) „	− (9,7158) „	− (9,8959) „	+ (0,0999) „
1882	„ =	(8,266) „	+ (9,6783) „	− (0,0964) „	− (9,9307) „
1883	„ =	− (8,076) „	+ (9,2821) „	+ (0,2119) „	− (9,7205) „
1891	„ =	− (8,6606) „	+ (9,7652) „	+ (9,5623) „	− (0,1705) „
1893	„ =	− (8,180) „	− (9,8407) „	+ (9,6680) „	+ (0,1501) „
1897	„ =	− (8,434) „	− (9,7928) „	+ (9,9744) „	+ (0,0874) „
1902	„ =	(8,242) „	− (9,5515) „	− (0,0225) „	+ (0,0283) „
1903	„ =	(8,336) „	+ (9,7773) „	− (9,9697) „	− (0,0678) „
1907	„ =	(8,273) „	+ (9,6732) „	− (0,0990) „	− (9,9266) „

1866	dr =	− (2,5827) dn	− (9,2642) dL	− (0,2918) $d\eta$	+ (0,2328) $\eta d\Pi$
1872	„ =	− (2,6037) „	+ (9,4369) „	− (9,8700) „	− (0,3972) „
1873	„ =	− (2,6663) „	+ (8,3349) „	+ (0,4188) „	− (9,2384) „
1874	„ =	− (2,6138) „	− (9,4528) „	− (8,9854) „	+ (0,4130) „

1876	dr =	$-(2{,}5875)\,dn$	$+(9{,}3371)\,dL$	$-(0{,}2269)\,d\eta$	$-(0{,}3035)\,\eta d\Pi$
1877	„ =	$-(2{,}6623)$ „	$+(9{,}0585)$ „	$+(0{,}3796)$ „	$-(9{,}9937)$ „
1878	„ =	$-(2{,}6323)$ „	$-(9{,}4305)$ „	$+(9{,}9373)$ „	$+(0{,}3953)$ „
1881	„ =	$-(2{,}6546)$ „	$+(9{,}2510)$ „	$+(0{,}3066)$ „	$-(0{,}1972)$ „
1882	„ =	$-(2{,}6456)$ „	$-(9{,}3554)$ „	$+(0{,}1919)$ „	$+(0{,}3306)$ „
1883	„ =	$-(2{,}5719)$ „	$+(7{,}760)$ „	$-(0{,}4118)$ „	$-(9{,}0714)$ „
1891	„ =	$-(2{,}5924)$ „	$-(9{,}3737)$ „	$-(0{,}1519)$ „	$+(0{,}3393)$ „
1893	„ =	$-(2{,}6171)$ „	$+(9{,}4433)$ „	$+(8{,}684)$ „	$-(0{,}4189)$ „
1897	„ =	$-(2{,}6016)$ „	$+(9{,}4134)$ „	$-(9{,}9053)$ „	$-(0{,}3963)$ „
1902	„ =	$-(2{,}6604)$ „	$+(9{,}0959)$ „	$+(0{,}3614)$ „	$-(0{,}0582)$ „
1903	„ =	$-(2{,}6327)$ „	$-(9{,}4081)$ „	$+(9{,}9237)$ „	$+(0{,}3945)$ „
1907	„ =	$-(2{,}6456)$ „	$-(9{,}3309)$ „	$+(0{,}1829)$ „	$+(0{,}3191)$ „

1866	dv =	$(0{,}0765)\,dL$	$-(0{,}1631)\,d\eta$	$-(0{,}2557)\,\eta d\Pi$
1872	„ =	$(0{,}0318)$ „	$+(0{,}2948)$ „	$-(9{,}8926)$ „
1873	„ =	$(9{,}9050)$ „	$+(9{,}1937)$ „	$+(0{,}2266)$ „
1874	„ =	$(0{,}0105)$ „	$-(0{,}3117)$ „	$-(9{,}5372)$ „
1876	„ =	$(0{,}0651)$ „	$+(0{,}2065)$ „	$-(0{,}1938)$ „
1877	„ =	$(9{,}9132)$ „	$+(9{,}8966)$ „	$+(0{,}1932)$ „
1878	„ =	$(9{,}9737)$ „	$-(0{,}2723)$ „	$+(9{,}5955)$ „
1881	„ =	$(9{,}9280)$ „	$+(0{,}0940)$ „	$+(0{,}1251)$ „
1882	„ =	$(9{,}9462)$ „	$-(0{,}1867)$ „	$+(9{,}9669)$ „
1883	„ =	$(0{,}0955)$ „	$+(9{,}0010)$ „	$-(0{,}3744)$ „
1891	„ =	$(0{,}0542)$ „	$-(0{,}2210)$ „	$-(0{,}1343)$ „
1893	„ =	$(0{,}0069)$ „	$+(0{,}3162)$ „	$-(9{,}0399)$ „
1897	„ =	$(0{,}0376)$ „	$+(0{,}3004)$ „	$-(9{,}9024)$ „
1902	„ =	$(9{,}9224)$ „	$+(9{,}9416)$ „	$+(0{,}2139)$ „
1903	„ =	$(9{,}9750)$ „	$-(0{,}2557)$ „	$+(9{,}7434)$ „
1907	„ =	$(9{,}9510)$ „	$-(0{,}1815)$ „	$+(0{,}0400)$ „

Die weitere Rechnung ergab mit Rücksicht auf die S. 35 gegebenen Differenzen Beobachtung — Rechnung die folgenden Bedingungsgleichungen für die Korrektionen der Elemente, in denen die rechten Seiten also $\cos\delta\,.\,d\alpha$ resp. $d\delta$ bedeuten:

Bedingungsgleichungen in Rektaszension.

	dn	dA	$d(\varkappa \cos \Gamma)$	$d(\varkappa \sin \Gamma)$	$d(\sin i \cos \Theta)$	$d(\sin i \sin \Theta)$	$d\varsigma$	$d\tau$	=
1866	— (4,3050)	+ (0,2213)	+ (0,2862)	— (0,4262)	— (9,6006)	+ (9,6645)	+ (0,8672)	+ (9,7902)	— 240″
1872	— (4,2244)	+ (0,2167)	+ (0,2392)	+ (0,4358)	+ (9,4828)	+ (9,7324)	+ (0,9476)	+ (0,0318)	— 130
1873	— (4,0629)	+ (0,0755)	— (0,3794)	+ (9,8815)	— (9,3920)	+ (8,5262)	— (0,9478)	— (8,9845)	— 855 (?)
1874	— (4,1263)	+ (0,1602)	— (9,2116)	— (0,4712)	+ (8,9006)	+ (9,8056)	— (0,3690)	+ (0,0058)	— 52
1876	— (4,2179)	+ (0,2766)	+ (0,4658)	+ (0,3382)	+ (9,5726)	+ (9,4650)	+ (1,0594)	+ (9,7944)	— 158
1877	— (4,0073)	+ (0,0903)	— (0,3344)	+ (0,1757)	— (9,4994)	+ (9,2404)	— (0,8049)	+ (8,8563)	— 3
1878	— (4,0349)	+ (0,1428)	— (0,0232)	— (0,4195)	+ (9,4582)	+ (9,7072)	— (0,6625)	+ (9,8983)	— 45
1881	— (3,9307)	+ (0,0971)	— (0,2254)	+ (0,3223)	— (9,5449)	+ (9,5480)	— (0,5658)	+ (9,3873)	+ 21
1882	— (3,9252)	+ (0,1218)	— (0,2470)	— (0,3088)	+ (9,5360)	+ (9,4924)	— (0,7245)	+ (9,6615)	+ 4
1883	— (4,0948)	+ (0,3265)	+ (0,6012)	— (9,7868)	— (9,2566)	— (7,932)	+ (0,9590)	— (8,8698)	— 70
1891	— (3,7164)	+ (0,2336)	+ (0,2839)	— (0,4173)	— (9,3892)	+ (9,7080)	+ (0,2508)	+ (9,3033)	+ 76
1893	— (3,5733)	+ (0,1776)	+ (9,8251)	+ (0,4758)	+ (8,9735)	+ (9,8199)	+ (0,0414)	+ (9,4380)	+ 117
1897	— (3,2453)	+ (0,2254)	+ (0,2455)	+ (0,4462)	+ (9,4589)	+ (9,7220)	+ (9,9179)	+ (8,9905)	+ 223
1902	+ (3,0348)	+ (0,0931)	— (0,3588)	+ (0,1900)	— (9,4661)	+ (9,2420)	+ (9,9065)	— (8,0070)	+ 292
1903	+ (3,2669)	+ (0,1434)	— (0,1081)	— (0,3948)	+ (9,4569)	+ (9,7028)	+ (9,9961)	— (9,1711)	+ 220
1907	+ (3,5702)	+ (0,1273)	— (0,3053)	— (0,2951)	+ (9,5343)	+ (9,4833)	+ (0,4391)	— (9,3249)	+ 303

Bedingungsgleichungen in Deklination.

	dn	dA	$d(\varkappa \cos \Gamma)$	$d(\varkappa \sin \Gamma)$	$d(\sin i \cos \Theta)$	$d(\sin i \sin \Theta)$	$d\varsigma$	$d\tau$	=
1866	— (3,9482)	+ (9,8647)	+ (9,9433)	— (0,0592)	+ (9,9710)	— (0,0558)	+ (0,5308)	— (0,1916)	— 104″
1872	+ (3,8389)	— (9,8310)	— (9,8636)	— (0,0451)	+ (9,8084)	+ (0,1435)	— (0,5690)	+ (0,4372)	+ 64
1873	+ (3,3080)	— (9,3216)	+ (9,6318)	— (9,0296)	— (0,1616)	+ (9,5485)	+ (0,2053)	— (9,5040)	+ 106 (?)
1874	— (3,7890)	+ (9,8229)	— (8,8875)	— (0,1340)	— (9,2007)	— (0,1634)	— (0,0355)	— (0,3612)	— 42
1876	+ (3,6986)	— (9,7568)	— (9,9572)	— (9,7942)	+ (0,0869)	+ (0,0324)	— (0,5470)	+ (0,3450)	+ 61
1877	+ (3,4056)	— (9,4892)	+ (9,7432)	— (9,5540)	— (0,1064)	+ (9,9058)	+ (0,2171)	+ (9,6317)	+ 21
1878	— (3,6433)	+ (9,7508)	— (9,6518)	— (0,0252)	— (9,8388)	— (0,1229)	— (0,2847)	— (0,3079)	— 9
1881	+ (3,4758)	— (9,6426)	+ (9,7810)	— (9,8620)	— (0,0051)	+ (0,0366)	+ (0,1253)	+ (9,8925)	— 1
1882	— (3,4242)	+ (9,6202)	— (9,7627)	— (9,7966)	— (0,0263)	— (0,0307)	— (0,2359)	— (0,1861)	+ 11
1883	— (3,1434)	+ (9,3775)	+ (9,6576)	— (8,222)	+ (0,2301)	— (9,3190)	+ (0,0236)	+ (9,6249)	— 6
1891	— (3,3015)	+ (9,8265)	+ (9,8758)	— (0,0108)	+ (9,8079)	— (0,1415)	+ (9,8422)	— (9,7400)	+ 45
1893	+ (3,2463)	— (9,8502)	— (9,5118)	— (0,1472)	+ (9,2711)	+ (0,1686)	— (9,7216)	+ (9,7843)	— 62
1897	+ (2,8571)	— (9,8349)	— (9,8666)	— (0,0499)	+ (9,8400)	+ (0,1389)	— (9,5356)	+ (9,4015)	— 111
1902	— (2,4175)	— (9,7407)	+ (9,7452)	— (9,5522)	— (0,0935)	+ (9,9274)	— (9,2957)	— (8,7794)	— 76
1903	+ (2,8695)	+ (9,7480)	— (9,7297)	— (9,9968)	— (9,8404)	— (0,1216)	+ (9,6131)	+ (9,5838)	+ 95
1907	+ (3,0612)	+ (9,6200)	— (9,8134)	— (9,7767)	— (0,0303)	— (0,0287)	+ (9,9437)	+ (9,8522)	+ 114

Siebentes Kapitel.

Auflösung der Bedingungsgleichungen zur Verbesserung der Elemente.

1. Diese Bedingungsgleichungen lösen wir nach der Methode der kleinsten Quadrate auf. Man wird sie hierzu, wie man zu sagen pflegt, homogen machen, indem man neue Variable einführt, damit die Koeffizienten der verschiedenen Variabeln von gleicher Größenordnung sind. Für das Rechnen mit der Rechenmaschine habe ich es sehr bequem gefunden, diese neuen Variabeln so zu wählen, daß der größte Koeffizient in einer jeden Variabeln gleich 1000 wird; ich habe demnach gesetzt:

$$110)\quad \begin{aligned} dn &= (8{,}6950)\,x_1, & d(\sin\iota\cos\Theta) &= (2{,}7699)\,x_5, \\ d\Lambda &= (2{,}6735)\,x_2, & d(\sin\iota\sin\Theta) &= (2{,}8565)\,x_6, \\ d(\varkappa\cos\Gamma) &= (2{,}3988)\,x_3, & d\varsigma &= (1{,}9406)\,x_7, \\ d(\varkappa\sin\Gamma) &= (2{,}5288)\,x_4, & d\tau &= (2{,}5628)\,x_8, \end{aligned}$$

wo die Zahlen in Klammern Logarithmen sind.

Man kann dann noch der Bequemlichkeit halber alle Gleichungen durch 1000 dividieren, um an die großen Zahlen keine Nullen zufügen zu müssen. Es ergeben sich dann nach bekannten Methoden die folgenden Normalgleichungen, wobei aus den S. 33 angeführten Gründen die Beobachtungen von 1873, 1897 und 1902 nicht berücksichtigt sind:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
+4{,}813\,x_1 & -5{,}148\,x_2 & -1{,}709\,x_3 & +0{,}528\,x_4 & -0{,}023\,x_5 & +0{,}137\,x_6 & -1{,}845\,x_7 & +0{,}096\,x_8 & = +0{,}707 & [+0{,}108]^{*)} \\
-5{,}148\;,, & +7{,}865\;,, & +1{,}419\;,, & -1{,}740\;,, & +0{,}039\;,, & -0{,}210\;,, & +2{,}197\;,, & -0{,}101\;,, & = -0{,}079 & [-0{,}005] \\
-1{,}709\;,, & +1{,}419\;,, & +3{,}624\;,, & +0{,}761\;,, & +0{,}011\;,, & -0{,}021\;,, & +3{,}153\;,, & -0{,}035\;,, & = -0{,}591 & [-0{,}047] \\
+0{,}528\;,, & -1{,}740\;,, & +0{,}761\;,, & +9{,}512\;,, & +0{,}000\;,, & +0{,}046\;,, & +0{,}935\;,, & +0{,}020\;,, & = -0{,}258 & [+0{,}000] \\
-0{,}023\;,, & +0{,}039\;,, & +0{,}011\;,, & +0{,}000\;,, & +4{,}551\;,, & +1{,}177\;,, & +0{,}013\;,, & +1{,}082\;,, & = -0{,}022 & [+0{,}004] \\
+0{,}137\;,, & -0{,}210\;,, & -0{,}021\;,, & +0{,}046\;,, & +1{,}177\;,, & +10{,}759\;,, & -0{,}061\;,, & +5{,}154\;,, & = -0{,}003 & [+0{,}002] \\
-1{,}845\;,, & +2{,}197\;,, & +3{,}153\;,, & +0{,}935\;,, & +0{,}013\;,, & -0{,}061\;,, & +3{,}970\;,, & -0{,}038\;,, & = -0{,}378 & [-0{,}040] \\
+0{,}096\;,, & -0{,}101\;,, & -0{,}035\;,, & +0{,}020\;,, & +1{,}082\;,, & +5{,}154\;,, & -0{,}038\;,, & +4{,}392\;,, & = +0{,}039 & [-0{,}005].
\end{array}$$

2. Die Gleichungen habe ich durch Elimination aufgelöst, indem immer die Unbekannte eliminiert wurde, welche den größten Koeffizienten hatte. Es

*) Die in Klammer [ ] gesetzten Werte beziehen sich auf die zweite Ausgleichung (S. 54) und sind der Kürze halber hier hergesetzt.



ergab sich so:

$$
111) \quad \begin{aligned}
x_1 &= +0{,}4116, & x_5 &= -0{,}0068,\\
x_2 &= +0{,}2725, & x_6 &= -0{,}0068,\\
x_3 &= -0{,}0905, & x_7 &= +0{,}0156,\\
x_4 &= +0{,}0054, & x_8 &= +0{,}0152
\end{aligned}
$$

und hiermit

$$
112) \quad \begin{aligned}
dn &= +0'',0204, & d(\sin\iota\cos\Theta) &= -(5{,}288),\\
d\Lambda &= +128'' = +0^\circ{,}036, & d(\sin\iota\sin\Theta) &= -(5{,}373),\\
d(\varkappa\cos\Gamma) &= -(6{,}0411), & d\varsigma &= +(4{,}819),\\
d(\varkappa\sin\Gamma) &= +(4{,}944) & d\tau &= +(5{,}431)
\end{aligned}
$$

und unser neues Elementensystem (II.) wird also:

$$
113) \quad \begin{aligned}
\log a &= 0{,}413338, & \log\sin\iota &= 8{,}63484, & \log\alpha &= 9{,}697101,\\
n &= 851'',1385, & \Theta &= 339^\circ{,}057, & \log\mu &= 9{,}5458574,\\
\Lambda &= 26^\circ{,}829, & \log\varsigma &= 6{,}2206, & \log\delta &= 8{,}735080_n,\\
\log\varkappa &= 8{,}99960, & \log\tau &= 6{,}2500, & B &= 228^\circ{,}618.\\
\Gamma &= 99^\circ{,}053,
\end{aligned}
$$

Auffallen könnte die Aenderung der Größen ς und τ, die indessen, da es sich nur um genäherte Berechnung handelt, nicht von Bedeutung ist, und noch keineswegs zu irgend welchen weitergehenden Schlüssen berechtigt. Auch kann wenigstens die Aenderung von ς durch die Fortlassung der Koeffizienten p_4' und q_4' bedingt sein.

3. Setzt man die gefundenen Korrektionen x_1 bis x_8 in die Bedingungsgleichungen ein, so erhält man die folgenden nun übrigbleibenden Fehler im Sinne Beobachtung — Rechnung:

	1866	1872	1874	1876	1877	1878	1881	1882	1883	1891	1893	1903	1907
$\cos\delta . d\alpha$	−6″	+20″	+38″	−18″	+ 3″	−16″	−4″	−23″	−10″	+ 9″	+10″	−18″	+13″
$d\delta$	+7″	− 5″	+ 5″	+15″	+17″	+ 5″	+5″	+ 1″	+ 4″	+16″	− 6″	−14″	+ 9″.

Diese Differenzen sind fast ausnahmslos überraschend klein und würden einen wahrscheinlichen Fehler von 12″ resp. 7″ ergeben. Indessen ist auf diesen wahrscheinlichen Fehler hier, wie auch in anderen Fällen, nicht viel zu geben. Man wird sich damit begnügen, zu konstatieren, daß die übrigbleibenden Fehler innerhalb der Genauigkeitsgrenze liegen, mit der die Rechnung überhaupt durchgeführt ist. Die beiden nichtbenutzten Beobachtungen von 1897 und 1902 (siehe S. 33) zeigen größere Abweichungen, die ich, wie oben gesagt, solange das Beobachtungsresultat von 1902 noch nicht vorlag, auf Unzuverlässigkeit der Beobachtung von 1897 schieben zu müssen glaubte; indessen wäre ein solcher Schluß voreilig. Man wird im allgemeinen annehmen können, daß bei Verhältnissen, wie sie bei Aegina vorliegen, die zur Ausgleichung benutzten Beobachtungen bis auf die

Bogenminute dargestellt werden können, während andere Beobachtungen, namentlich gegen auf längere Zeit vorausberechnete Orte, doch etwas mehr abweichen werden. Natürlich gilt dies nur bei Annahme der unseren Tafeln zugrunde liegenden Genauigkeitsgrenze; unsere Methoden werden auch bei schärferen Rechnungen sich als zweckmäßig erweisen.

Zur Bestätigung habe ich mit den neuen Elementen alle Orte nochmals gerechnet, und zwar entsprechend der erstrebten Genauigkeit, nur fünfstellig, wobei also Differenzen von 10" bis 15" bei jedem Orte schon aus der Rechnung erwartet werden dürfen. Die Resultate sind die folgenden:

	L	R	W	$\log \eta$	Π	v	$\log r$	$\log \sin i$	☊
1866	48°,009	+ 0,00076	+ 0°,422	9,02979	81°,211	39°,966	0,37439	8,5724	11°,50
1872	143,695	+ 0,00105	— 0,008	964	279	155,215	0,39521	21	38
1873	256,008	— 0,00112	+ 0,213	960	296	256,832	0,45789	20	35
1874	6,368	+ 0,00180	+ 0,259	956	312	353,923	0,40544	20	32
1876	122,285	+ 0,00090	— 0,175	952	329	131,391	0,37910	19	30
1877	233,111	— 0,00101	— 0,008	948	345	238,299	0,45385	19	26
1878	334,550	— 0,00068	+ 0,162	944	362	332,496	0,42394	19	24
1881	215,227	+ 0,00077	— 0,103	936	396	223,382	0,44622	19	19
1882	325,633	— 0,00129	+ 0,043	932	413	315,220	0,43728	19	17
1883	83,134	+ 0,00191	+ 0,160	928	430	83,355	0,36348	19	14
1891	34,591	— 0,00148	— 0,183	905	530	25,002	0,38407	18	04
1893	160,347	+ 0,00135	— 0,095	900	548	172,686	0,40869	18	11,03
1897	141,766	+ 0,00182	— 0,086	888	599	153,163	0,39315	17	10,99
1902	229,581	+ 0,00062	— 0,478	872	665	235,808	0,45195	15	95
1903	343,532	— 0,00035	— 0,505	868	682	332,201	0,42426	14	94
1907	324,440	+ 0,00019	— 0,485	9,02856	81,733	314,678	0,43716	8,5711	10,92

	$\log x$	$\log y$	$\log z$	$\log \Delta$	α	δ	Beob. — Rechn. $d\alpha$	$d\delta$
					h m s	° ′ ″	s	″
1866	0,25890	0,13923	9,80871	0,17225	1 35 20,4	+ 11 41 5	− 1,5	− 2
1872	$0,35320_n$	9,96976	9,66680	0,17864	10 11 14,1	+ 13 26 7	+ 1,9	− 10
1873	$9,81571_n$	$0,40197_n$	$0,07951_n$	0,27792	16 30 16,6	− 24 49 47	(− 60,2)	(+ 98)
1874	0,40297	$9,37154_n$	$9,12380_n$	0,20171	23 7 4,1	− 6 46 47	+ 1,5	− 6
1876	$0,19935_n$	0,20830	9,89491	0,14945	8 51 26,1	+ 20 54 8	− 2,8	+ 26
1877	$0,17450_n$	$0,33988_n$	$0,01430_n$	0,26316	15 46 3,4	− 22 22 41	+ 0,7	+ 9
1878	0,37181	$0,04092_n$	$9,73579_n$	0,21832	22 8 13,0	− 13 47 13	0,0	+ 13
1881	$0,30768_n$	$0,23992_n$	$9,91079_n$	0,25182	14 42 22,7	− 17 38 0	− 0,2	+ 2
1882	0,28836	$0,23894_n$	$9,92651_n$	0,23834	21 2 17,6	− 19 48 54	− 2,3	+ 2
1883	9,42739	0,31603	9,99457	0,12782	5 5 7,3	+ 26 22 17	− 0,4	+ 7
1891	0,34136	9,96842	9,63057	0,17283	2 13 20,0	+ 14 17 51	+ 0,6	+ 22
1893	$0,40513_n$	9,45761	9,19647	0,19618	11 25 47,7	+ 4 53 2	+ 1,6	− 11
1897	$0,34362_n$	0,00024	9,69525	0,17390	10 7 10,7	+ 13 54 26	+ 5,1!	− 40!
1902	$0,20173_n$	$0,32580_n$	$9,99987_n$	0,26544	15 52 52,6	− 22 36 38	+ 5,1!	− 24!
1903	0,37097	$0,04561_n$	$9,73990_n$	0,21929	22 5 46,3	− 14 0 13	− 1,3	− 11
1907	0,28413	$0,24298_n$	$9,93017_n$	0,23819	20 59 49,1	− 19 59 33	+ 0,3	+ 15

Die hier sich ergebenden Differenzen, Beobachtung — Rechnung, unterscheiden sich nicht unwesentlich von den oben gefundenen, was wohl nur die Folge der nur fünfstelligen Rechnung ist.

4. Die im vorigen erreichte Darstellung der Beobachtungen kann als vollkommen befriedigend angesehen werden. Indessen haben wir bei der Rechnung nicht darauf Rücksicht genommen, daß sich durch die Aenderung der mittleren Bewegung auch die Koeffizienten der Störungsglieder und namentlich die größeren unter ihnen infolge der Aenderung der Integrationsdivisoren, korrigieren. So hatten wir auch die Koeffizienten p_4' und q_4' (S. 41 u. 42) bei Seite gelassen.

Wir wollen nun der Vollständigkeit halber auch die ganzen Störungsausdrücke korrigieren für den neu gefundenen Wert von $\log a$ resp. n. Dies geschieht leicht mit Hilfe unserer Tafeln im dritten Teil, aus denen wir die Koeffizienten der Störungsglieder entweder neu entnehmen oder mit Hilfe der in den Tafeln angegebenen Differenzen entsprechend korrigieren. Mit den neuen Werten 113) von $\log \alpha$ und $\log \delta$ erhalten wir so die verbesserten Ausdrücke für die Gyldénschen Koordinaten, die wir gleich auf die Zeit transformieren und auf die geeignete Form für die Tabulierung bringen.

Wir erhalten so:

$$114)\quad \begin{aligned} R &= \Sigma C_i \sin\frac{i}{3}L + \Sigma D_i \cos\frac{i}{3}L, \\ K &= \Sigma A_i \sin\frac{i}{3}L + \Sigma B_i \cos\frac{i}{3}L, \\ \mathfrak{Z} &= G_3 \sin L + H_3 \cos L, \\ \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} &= G_3' \sin L + H_3' \cos L, \end{aligned} \qquad V = -a_{0\cdot 3}\cos 3f + b_{0\cdot 3}\sin 3f,$$

wo für die Koeffizienten A, B, C, D, G, H die Relationen 38), 39), 46) gelten und wo nun:

$$115)\quad \begin{aligned}
c_{0\cdot 0} &= (5{,}462), \\
\left.\begin{matrix} c_{0\cdot 3} \\ d_{0\cdot 3} \end{matrix}\right\} &= (8{,}376)\,\eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2u - (8{,}796)\,\eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (u+u_1), \\
\left.\begin{matrix} c_{1\cdot 2} \\ d_{1\cdot 2} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}563)\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u - (6{,}975)\,\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u_1, \\
c_{2\cdot 1} &= -(6{,}466), \\
\left.\begin{matrix} c_{2\cdot 2} \\ d_{2\cdot 2} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}629)\,\eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2u, \\
\left.\begin{matrix} c_{2\cdot 4} \\ d_{2\cdot 4} \end{matrix}\right\} &= -(7{,}731)\,\eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2u + (8{,}237)\,\eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (u+u_1), \\
\left.\begin{matrix} c_{3\cdot 3} \\ d_{3\cdot 3} \end{matrix}\right\} &= \quad (8{,}110)\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u - (8{,}354)\,\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u_1, \\
c_{4\cdot 3} &= \quad (6{,}891), \\
\left.\begin{matrix} c_{4\cdot 5} \\ d_{4\cdot 5} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}457)\,\eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2u - (8{,}039)\,\eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (u+u_1), \\
\left.\begin{matrix} c_{5\cdot 4} \\ d_{5\cdot 4} \end{matrix}\right\} &= -(6{,}657)\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u + (6{,}993)\,\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u_1, \\
c_{6\cdot 3} &= \quad (5{,}977) + (8{,}086)\,\eta^2 - (8{,}330)\,\eta\eta' \cos(u-u_1), \\
d_{6\cdot 3} &= -(8{,}330)\,\eta\eta' \sin(u-u_1), \\
\left.\begin{matrix} c_{7\cdot 2} \\ d_{7\cdot 2} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}004)\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u.
\end{aligned}$$

$$116)\quad \begin{aligned}
\left.\begin{matrix} a_{1\cdot 1} \\ b_{1\cdot 1} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}002)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u - (7{,}293)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u_1, \\
\left.\begin{matrix} a_{1\cdot 2} \\ b_{1\cdot 2} \end{matrix}\right\} &= -(8{,}174)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u + (7{,}733)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u_1, \\
b_{2\cdot 1} &= \quad (6{,}924), \\
\left.\begin{matrix} a_{2\cdot 2} \\ b_{2\cdot 2} \end{matrix}\right\} &= \quad (7{,}132)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u,
\end{aligned}$$

$$116)\quad \left.\begin{matrix} a_{3\cdot4} \\ b_{3\cdot4} \end{matrix}\right\} = (8{,}110)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u - (8{,}652)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) + (8{,}585)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot3} \\ b_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = -(8{,}421)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u + (8{,}672)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1 - (8{,}569)\,\eta^3 \frac{\sin}{\cos} u + (9{,}091)\,\eta^2\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot-3} \\ b_{3\cdot-3} \end{matrix}\right\} = -(8{,}764)\,\eta^2\eta' \frac{\sin}{\cos}(2u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} a_{3\cdot0} \\ b_{3\cdot0} \end{matrix}\right\} = -2\varrho\varkappa \frac{\sin}{\cos}(\varrho L + \Gamma),$$

$$b_{4\cdot3} = -(7{,}120) - (7{,}459)\,\eta^2,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{4\cdot5} \\ b_{4\cdot5} \end{matrix}\right\} = -(7{,}730)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u + (8{,}299)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) - (8{,}263)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{5\cdot1} \\ b_{5\cdot1} \end{matrix}\right\} = (6{,}391)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{5\cdot4} \\ b_{5\cdot4} \end{matrix}\right\} = (6{,}882)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}173)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$a_{6\cdot3} = (8{,}040)\,\eta\eta' \sin(u-u_1),$$

$$b_{6\cdot3} = -(6{,}115) - (7{,}770)\,\eta^2 + (8{,}040)\,\eta\eta' \cos(u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} a_{7\cdot3} \\ b_{7\cdot3} \end{matrix}\right\} = -(6{,}654)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u,$$

$$\left.\begin{matrix} a_{9\cdot3} \\ b_{9\cdot3} \end{matrix}\right\} = (8{,}569)\,\eta^3 \frac{\sin}{\cos} u - (8{,}814)\,\eta^2\eta' \frac{\sin}{\cos}(2u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} a_{10\cdot3} \\ b_{10\cdot3} \end{matrix}\right\} = (7{,}461)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u,$$

$$117)\quad \left.\begin{matrix} a_{0\cdot3} \\ b_{0\cdot3} \end{matrix}\right\} = -(9{,}4982)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u + (0{,}0470)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos}(u+u_1) - (9{,}234)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$-(7{,}753)\,\varkappa^2 \frac{\sin}{\cos} 2(\varrho L + \Gamma) + (7{,}809)\,\varkappa\varkappa' \frac{\sin}{\cos}(\varrho L + \Gamma + \Gamma_1)$$

$$-(8{,}596)\sin^2 j \frac{\sin}{\cos} 2\mathfrak{u}_1 + (8{,}897)\sin j \sin j' \frac{\sin}{\cos}(\mathfrak{u} + \mathfrak{u}_1).$$

$$118)\quad \left.\begin{matrix} g_{3\cdot3} \\ h_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = (7{,}235)\sin j \frac{\sin}{\cos} \mathfrak{u} - (7{,}235)\sin j' \frac{\sin}{\cos} \mathfrak{u}_1,$$

$$\left.\begin{matrix} g'_{3\cdot3} \\ h'_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = (7{,}211)\sin j \frac{\cos}{\sin} \mathfrak{u} - (7{,}211)\sin j' \frac{\cos}{\sin} \mathfrak{u}_1,$$

$$119)\quad \left.\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right\} = (7{,}223)\sin j \frac{\cos}{\sin} \mathfrak{u} - (7{,}223)\sin j' \frac{\sin}{\cos} \mathfrak{u}_1.$$

Merklich geändert haben sich nur die beiden größten Koeffizienten in V, nämlich $a_{0\cdot3}$ und $b_{0\cdot3}$, weshalb wir besser bei der Berechnung der Differentialquotienten

96) wenigstens die Größe q'_4 berücksichtigt hätten. $\varkappa_1$ und $\sin \iota_1$ bleiben ganz ungeändert.

5. Verbindet man zum Zwecke der Berechnung eines Ortes die vorstehenden Ausdrücke mit dem Elementensystem II, so wird man andere Resultate erhalten, als unsere Rechnung auf S. 50—51 geliefert hatte. Wir wollen darum eine neue Ausgleichung vornehmen und dasjenige Elementensystem (III.) bestimmen, daß unter Zugrundelegung der Ausdrücke 115) bis 119) die Beobachtungen möglichst gut darstellt.

Wir müssen also zunächst nochmals die Oerter berechnen aus diesen Grundlagen. Zu diesem Zweck habe ich die entsprechenden Größen neu tabuliert, kann jedoch auf den Abdruck dieser Tafel verzichten.

Ich gebe nur die Rechnungsresultate im gleichen Umfange, wie bei den früheren Rechnungen. Es fand sich:

	W	v	$\log x$	$\log y$	$\log z$	$\log \Delta$	α	δ	Beobachtg. — Rechnung		
									$d\alpha$	$\cos\delta . d\alpha$	$d\delta$
1866	$+0{,}^\circ418$	$39{,}^\circ971$	0,25887	0,13927	9,80876	0,17225	$1^h\ 35^m\ 21{,}^s8$	$+11^\circ\ 41'\ 16''$	$-2{,}^s9$	$-43''$	$-13''$
1872	$-0{,}011$	155,219	$0{,}35321_n$	9,96969	9,66674	0,17868	10 11 15,8	+13 25 59	+0,2	+3	−2
1873	$+0{,}210$	256,835	$9{,}81561_n$	$0{,}40198_n$	$0{,}07951_n$	0,27791	16 30 18,0	−24 49 51	−61,6		+102?
1874	$+0{,}256$	353,927	0,40298	$9{,}37124_n$	$9{,}12356_n$	0,20171	23 7 5,6	−6 46 41	0,0	0	−12
1876	$-0{,}177$	131,393	$0{,}19937_n$	0,20829	9,89490	0,14944	8 51 26,9	+20 54 5	−3,6	−50	+29
1877	$-0{,}010$	238,301	$0{,}17447_n$	$0{,}33990_n$	$0{,}01431_n$	0,26318	15 46 4,4	−22 22 43	−0,5	−4	+11
1878	$+0{,}160$	332,498	0,37182	$0{,}04089_n$	$9{,}73577_n$	0,21831	22 8 13,8	−13 47 9	−0,8	−12	+9
1881	$-0{,}103$	223,382	$0{,}30768_n$	$0{,}23992_n$	$9{,}91079_n$	0,25182	14 42 22,7	−17 38 0	−0,2	−3	+2
1882	$+0{,}044$	315,219	0,28835	$0{,}23895_n$	$9{,}92652_n$	0,23834	21 2 17,3	−19 48 53	−2,0	−28	+1
1883	$+0{,}161$	83,354	9,42745	0,31602	$9{,}99458_n$	0,12780	5 5 6,8	+26 22 32	+0,1	+1	−8
1891	$-0{,}179$	24,997	0,34136	9,96834	9,63049	0,17279	2 13 18,5	+14 17 44	+2,1	+61	+29
1893	$-0{,}091$	172,682	$0{,}40511_n$	9,45783	9,19670	0,19616	11 25 46,4	+4 53 14	+2,9	+43	−23
1897	$-0{,}081$	153,158	$0{,}34360_n$	0,00032	9,69533	0,17392	10 7 8,6	+13 54 38	+7,2	+105	−52!
1902	$-0{,}473$	235,804	$0{,}20177_n$	$0{,}32577_n$	$9{,}99985_n$	0,26543	15 52 50,6	−22 36 37	+7,1	+98	−25!
1903	$-0{,}500$	332,196	0,37095	$0{,}04569_n$	$9{,}73996_n$	0,21929	22 5 44,0	−14 0 25	+1,0	+15	+1
1907	$-0{,}481$	314,675	0,28410	$0{,}24301_n$	$9{,}93016_n$	0,23818	20 59 47,2	−19 59 18	+3,6	+51	0

Die Werte von L, R, η, Π, r, i, Ω sind die gleichen, wie S. 50.

6. Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der neuen Korrektionen der Elemente brauchen wir hier nicht herzusetzen, da wir für die Differentialquotienten die früher berechneten Werte beibehalten können und die linken Seiten dieser Gleichungen also identisch sind mit den Gleichungen S. 47 während die rechten Seiten durch die eben gefundenen Werte von $\cos\delta . d\alpha$ und $d\delta$ ersetzt werden. Dasselbe gilt von den Normalgleichungen und wir haben der Kürze halber die nun sich ergebenden Werte der rechten Seiten

dieser Gleichungen bereits S. 48 in Klammern [] angegeben. Die Beobachtungen von 1873, 1897, 1902 sind auch hier nicht mit eingeschlossen.

Die Auflösung der Normalgleichungen ergab folgende Werte

$$\text{120)}\quad \begin{aligned} x_1 &= +0{,}0796, & x_5 &= +0{,}0013,\\ x_2 &= +0{,}0548, & x_6 &= +0{,}0020,\\ x_3 &= +0{,}0188, & x_7 &= -0{,}0199,\\ x_4 &= +0{,}0061, & x_8 &= -0{,}0043. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die benutzten Bedingungsgleichungen ein, so bleiben die folgenden Differenzen Beobachtung — Rechnung übrig,

	1866	1872	1874	1876	1877	1878	1881	1882	1883	1891	1893	1903	1907
$\cos\delta . d\alpha$	+3″	+29″	+19″	−32″	0″	− 2″	−4″	−26″	−6″	+ 6″	+11″	−17″	+19″
$d\delta$	+9″	−11″	− 5″	+24″	+10″	+14″	+3″	+ 2″	−9″	+20″	− 9″	− 8″	− 6″.

Die Differenzen sind im Durchschnitt von derselben Größe, wie S. 49, was auch zu erwarten war.

Für die Elemente ergeben sich die kleinen Korrektionen:

$$\text{121)}\quad \begin{aligned} dn &= +0'',0039, & d(\sin\iota\cos\Theta) &= +(4{,}576),\\ dA &= +26'' = +0^\circ{,}007, & d(\sin\iota\sin\Theta) &= +(4{,}852),\\ d(\varkappa\cos\Gamma) &= +(5{,}358), & d\varsigma &= -(4{,}925),\\ d(\varkappa\sin\Gamma) &= +(4{,}999), & d\tau &= -(4{,}884) \end{aligned}$$

und hiermit erhalten wir das folgende neue Elementensystem (III.)

$$\text{122)}\quad \begin{aligned} n &= 851'',1424, & \log\sin\iota &= 8{,}63485, & \log\alpha &= 9{,}697099,\\ \log a &= 0{,}413336, & \Theta &= 339^\circ{,}068, & \log\mu &= 9{,}5458554,\\ A &= 26^\circ{,}836, & \log\varsigma &= 6{,}1980, & \log\delta &= 8{,}735042_n,\\ \log\varkappa &= 8{,}99963, & \log\tau &= 6{,}2309, & B &= 228^\circ{,}616,\\ \Gamma &= 99^\circ{,}040, \end{aligned}$$

$t_0 = 1900$ Jan. $0{,}0^h$ Mittl. Zeit Berlin, Aequ. 1900,0.

Bemerkt mag werden, daß die Korrektion der Apsidenbewegung ς, die wir für das Elementensystem II gefunden hatten, hier wieder verschwunden ist und ziemlich genau der aus der Theorie folgende Wert sich wieder hergestellt hat.

Wir fügen hier noch der besseren Uebersicht halber alle anderen zur Rechnung nötigen Werte und Relationen mit Ausnahme der bereits S. 51—53 gegebenen Ausdrücke für R, W und $\mathfrak{Z}$ bei:

$$\text{123)}\quad \begin{aligned} \eta\,{\cos\atop\sin}\,\Pi &= \varkappa\,{\cos\atop\sin}\,(\varsigma L+\Gamma)+\varkappa_1\,{\cos\atop\sin}\,\Gamma_1, \qquad L = n(t-t_0)+A,\\ \log\varkappa_1 &= 8{,}50595,\\ \Gamma_1 &= 12^\circ{,}712, \end{aligned}$$

$$
124)\qquad
\begin{aligned}
\sin j \,{\cos \atop \sin}\, \sigma &= \sin \iota \,{\cos \atop \sin}\, (\Theta - \tau L) + \sin \iota_1 \,{\cos \atop \sin}\, \Theta_1, \\
\log \sin \iota_1 &= 8{,}35871, \\
\Theta_1 &= 99^{\circ}{,}438.
\end{aligned}
$$

7. Auf Grund dieser neuen Elemente habe ich neue Tafeln für den Zeitraum 1866—1910 gerechnet, welche als Tafel 1 und 2 abgedruckt sind, wobei wir auch unsere Konstanten für den Aequator A, a, B, b, C, c tabuliert haben. Aus ihnen sind dann die Oerter nochmals gerechnet worden mit folgendem Resultate:

	L	$\log \eta$	Π	v	$\log r$	$\log \sin i$	Ω	$\log x$	$\log y$	$\log z$	$\log \Delta$	α	δ	Beob. — Rechn. $d\alpha$	Beob. — Rechn. $d\delta$
1866	$48^{\circ}{,}003$	9,02980	$81^{\circ}{,}222$	$39^{\circ}{,}962$	0,37439	8,5723	$11^{\circ}{,}49$	0,25892	0,13919	9,80866	0,17225	$1^h\ 35^m\ 18^s{,}8$	$+11^{\circ}\ 40'\ 55''$	$+\ 0^s{,}1$	$+\ 8''$
1872	143,691	965	286	155,214	0,39520	20	38	0,35318$_n$	9,96976	9,66679	0,17861	10 11 13,7	+ 13 26 8	+ 2,3	— 11
1873	256,004	961	302	256,832	0,45789	20	34	9,81570$_n$	0,40197$_n$	0,07952$_n$	0,27792	16 30 16,8	— 24 49 49	—60,4	+100?
1874	6,365	957	318	353,923	0,40545	20	32	0,40298	9,87157$_n$	9,12390$_n$	0,20173	23 7 4,2	— 6 46 51	+ 1,4	— 2
1876	122,282	954	334	131,389	0,37910	19	29	0,19933$_n$	0,20832	9,89493	0,14946	8 51 25,0	+ 20 54 11	— 1,7	+ 23
1877	233,109	950	349	238,299	0,45385	19	26	0,17449$_n$	0,33989$_n$	0,01431$_n$	0,26317	15 46 8,7	— 22 22 41	+ 0,4	+ 9
1878	344,548	946	365	332,496	0,42393	19	24	0,37180	0,04091$_n$	9,73579$_n$	0,21830	22 8 13,0	— 13 47 15	0,0	+ 15
1881	215,226	939	397	223,381	0,44622	19	19	0,30768$_n$	0,23991$_n$	9,91078$_n$	0,25180	14 42 22,9	— 17 38 1	— 0,4	+ 3
1882	325,632	935	412	315,217	0,43729	19	17	0,28835	0,23897$_n$	9,92653$_n$	0,23836	21 2 16,8	— 19 48 54	— 1,5	+ 2
1883	83,135	931	429	83,355	0,36348	19	14	9,42736	0,31603	9,99457	0,12780	5 5 7,6	+ 26 22 20	— 0,7	+ 4
1891	34,596	909	523	25,003	0,38406	19	04	0,34134	9,96843	9,63057	0,17281	2 13 20,6	+ 14 17 53	0,0	+ 20
1893	160,352	904	541	172,688	0,40869	19	03	0,40513$_n$	9,45748	9,19648	0,19618	11 25 48,5	+ 4 53 2	+ 0,8	— 11
1897	141,772	893	588	153,167	0,39315	18	11,00	0,34364$_n$	0,00019	9,69523	0,17391	10 7 11,9	+ 13 54 22	+ 3,9	— 36!
1902	229,590	879	652	235,810	0,45196	16	10,97	0,20172$_n$	0,32583$_n$	9,99990$_n$	0,26547	15 52 53,4	— 22 36 40	+ 4,2	— 22!
1903	343,540	874	668	332,202	0,42425	15	95	0,37096	0,04558$_n$	9,73989$_n$	0,21928	22 5 46,4	— 14 0 14	— 1,4	— 10
1907	324,450	9,02863	81,716	314,680	0,43714	8,5712	10,94	0,28412	0,24296$_n$	9,93014$_n$	0,23817	20 59 49,3	— 19 59 30	+ 1,5	+ 12

Die Größe R hat die gleichen Werte wie S. 50.
„ „ W „ „ „ „ „ „ 54.

Nachdem wir eine befriedigende Darstellung der bisherigen Beobachtungen erreicht haben, wollen wir im folgenden Tafeln zur Vorausberechnung der Oerter von Aegina bis zum Jahre 1950 entwerfen.

Achtes Kapitel.

Berechnung der Tafeln für die Gyldénschen Koordinaten für 1910—1950.

Auf Grund der gefundenen Resultate wollen wir nun die Bewegungstafeln für Aegina für das nächste halbe Jahrhundert vorausberechnen. Gewiß wird man nicht erwarten dürfen, daß es uns gelingen wird, hierdurch die künftigen Beobachtungen ebensogut darzustellen, wie es der Fall mit den früheren Beobachtungen war; immerhin kann man hoffen, daß sich die Darstellung im Großen und Ganzen, wenn auch nicht innerhalb der Bogenminute, so doch auf wenige Bogenminuten halten wird, welche Genauigkeit wir uns ja auch zum eigentlichen Ziel gesetzt haben.

1. Wir verfahren hier wie im dritten Kapitel*) und haben zunächst aus den Gleichungen 123) und 124):

Jan. 0,0	L	$sL+\Gamma$	$\log\eta\cos\Pi$	$\log\eta\sin\Pi$	$\log\eta$	Π
1910	$890^\circ{,}273$	$99^\circ{,}180$	8,18563	9,02403	9,02856	$81^\circ{,}745$
1920	1753,709	316	17894	02387	02827	867
1930	2617,382	453	17214	02371	02798	81,989
1940	3480,819	589	16523	02355	02769	82,111
1950	4344,492	99,725	8,15821	9,02339	9,02740	82,233

Jan. 0,0	$\Theta-\tau L$	$\log\sin j\cos\sigma$	$\log\sin j\sin\sigma$	$\log\sin j$	σ
1910	$338^\circ{,}916$	8,56234	7,8460	8,57022	$10^\circ{,}877$
1920	770	56187	8395	56954	732
1930	623	56139	8330	56885	587
1940	476	56091	8264	56816	442
1950	338,329	8,56042	7,8197	8,56747	10,297

*) Hier, wie dort, wurde fast die ganze Rechnung mit Hilfe einer Rechenmaschine sehr bequem und zur größeren Sicherheit unter Mitnahme der 6. Dezimale ausgeführt.

2. Sodann ergeben sich aus den Gleichungen 115) bis 119) in Einheiten der 5. Dezimale des Numerus:

	$a_{0\cdot 3}$	$b_{0\cdot 3}$	$b_{1\cdot 2}$	$b_{3\cdot 3}$	$c_{3\cdot 3}$
1910	+463	+260	+3	+187	−87
1920	464	259	3	188	87
1930	466	258	3	189	87
1940	467	257	4	189	88
1950	+468	+255	+4	+190	−88

$a_{1\cdot 1} = +8,$ $\quad a_{1\cdot 2} = -152,$ $\quad b_{2\cdot 1} = +84,$ $\quad a_{2\cdot 2} = 0,$ $\quad a_{2\cdot 4} = -15,$
$b_{1\cdot 1} = -8,$ $\quad b_{1\cdot 2}$ s. oben, $\quad b_{2\cdot 2} = -2,$ $\quad b_{2\cdot 4} = -4,$

$a_{3\cdot 3} = -231,$ $\quad a_{3\cdot -3} = 0,$ $\quad a_{3\cdot 0} = -3,$ $\quad b_{4\cdot 2} = -135,$ $\quad a_{4\cdot 5} = +7,$
$b_{3\cdot 3}$ s. oben, $\quad b_{3\cdot -3} = +3,$ $\quad b_{3\cdot 0} = +1,$ $\quad b_{4\cdot 5} = +1,$

$a_{5\cdot 1} = +3,$ $\quad a_{5\cdot 4} = +6,$ $\quad a_{6\cdot 3} = +5,$ $\quad a_{7\cdot 2} = -5,$ $\quad a_{9\cdot 3} = +3,$ $\quad a_{10\cdot 2} = +1,$
$b_{5\cdot 1} = 0,$ $\quad b_{5\cdot 4} = -6,$ $\quad b_{6\cdot 3} = -18,$ $\quad b_{7\cdot 2} = -1,$ $\quad b_{9\cdot 3} = +4,$ $\quad b_{10\cdot 2} = -3.$

$c_{0\cdot 0} = +3,$ $\quad c_{0\cdot 3} = -23,$ $\quad c_{1\cdot 2} = +1,$ $\quad c_{2\cdot 1} = -29,$ $\quad c_{2\cdot 2} = -5,$ $\quad c_{2\cdot 4} = +5,$
$d_{0\cdot 3} = -25,$ $\quad d_{1\cdot 2} = +38,$ $\quad d_{2\cdot 2} = +1,$ $\quad d_{2\cdot 4} = +7,$

$c_{3\cdot 3}$ s. oben, $\quad c_{4\cdot 2} = +78,$ $\quad c_{4\cdot 5} = -3,$ $\quad c_{5\cdot 4} = +4,$ $\quad c_{6\cdot 3} = +20,$ $\quad c_{7\cdot 2} = +1,$
$d_{3\cdot 3} = +112,$ $\quad d_{4\cdot 5} = -5,$ $\quad d_{5\cdot 4} = -4,$ $\quad d_{6\cdot 3} = -10,$ $\quad d_{7\cdot 2} = +11.$

$g_{3\cdot 3} = -3,$ $\quad g'_{3\cdot 3} = +6,$ $\quad g = +7,$
$h_{3\cdot 3} = +7,$ $\quad h'_{3\cdot 3} = -3,$ $\quad h = -3.$

3. Das Argument f wird:

Jan. 0,0	f
1910	244°,74
11	246,30
12	247,87
13	249,43
14	251,00
1915	252,56

Jan. 0,0	f
1915	252°,56
16	254,12
17	255,68
18	257,25
19	258,81
1920	260,38

Jan. 0,0	f	Jan. 0,0	f
1920	260°,38	1935	283°,83
21	261,94	36	285,40
22	263,51	37	286,96
23	265,07	38	288,53
24	266,63	39	290,09
1925	268,19	1940	291,65
26	269,76	41	293,21
27	271,32	42	294,78
28	272,89	43	296,34
29	274,45	44	297,91
1930	276,02	1945	299,47
31	277,58	46	301,04
32	279,14	47	302,60
33	280,70	48	304,17
34	282,27	49	305,73
1935	283,83	1950	307,29

4. Hiermit ergeben sich endlich die Werte, die wir in Tafel 3 und 4 tabuliert haben. Am Fuße der Tafel 4 haben wir alle Formeln zugefügt zur Berechnung der rechtwinkligen heliozentrischen Koordination x, y, z, ebenso wie zur Berechnung der heliozentrischen Breite b und Länge l. Die Einheit in dieser Tafel ist durchweg die 5. Dezimale; man berechnet am bequemsten auch die Funktion W in dieser Einheit und multipliziert sie dann zur Verwandlung in Tausendstel Grade mit 0,57296.

Neuntes Kapitel.

Die oskulierenden Elemente. Indirekte Methode.

Für manche Zwecke wird es wünschenswert sein, die oskulierenden Elemente eines Planeten für irgend eine Epoche zu kennen; namentlich kann dies der Fall sein, wenn man eine Ephemeride für eine kürzere Zeit rechnen will, ohne für jeden Ephemeridenort die Störungen besonders zu bestimmen. Obwohl das letztere

mit Hilfe unserer Tafeln außerordentlich bequem*) geschieht und auch die schärfsten Resultate gibt und wir für diesen Zweck noch eine andere Art von Elementen (Kap. XI) ableiten werden, so wollen wir doch die Methoden zur Ermittlung der oskulierenden Elemente aus den Ausdrücken für die Gyldénschen Koordinaten resp. aus den Bewegungstafeln entwickeln.

Die Elemente i und Ω, durch welche die Lage der oskulierenden Ellipse bestimmt wird, haben wir oben bereits abgeleitet und auch tabuliert (Taf. 3); ebenso die Koordinaten a, A, b, B, c, C für den Aequator. Die übrigen oskulierenden Elemente kann man auf zwei verschiedene Arten ermitteln, entweder indem man diese selbst oder indem man ihre Störungen berechnet.

1. Für beide Methoden braucht man außer den Ausdrücken für die Gyldénschen Koordinaten noch deren Ableitungen, nämlich die Größen S und $\frac{dR}{dv}$. Die erstere stellt die Störungen der Flächengeschwindigkeit dar und ist definiert durch die Gleichung 11) des II. Teils

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}, \tag{125}$$

wo M die Sonnenmasse (strenger die Summe der Sonnen- und Planetenmasse) oder das Quadrat der Gaußschen Konstante ($\log\sqrt{M} = \log k = 8{,}235\,5814-10$) bedeutet.

Gelegentlich der Zusammenstellung der Ausdrücke zur Berechnung der heliozentrischen Koordinaten (Teil III, Kapitel I) haben wir die Funktion S nicht erwähnt; sie hat eine den Größen R und W ganz analoge Form und ist für einen gewöhnlichen Planeten unter Fortlassung der für uns belanglosen Glieder**):

$$\begin{aligned}
S = \bar{a} &+ \sum_1^\infty S_{n\cdot0\cdot0}\cos nw + \sum_1^\infty S^{+1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \sum_0^\infty S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)\\
&+ \sum_1^\infty S^{-1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \sum_1^\infty S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)\\
&+ \sum_1^\infty S_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos nw + \sum_0^\infty S^{+2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty S_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos nw\\
&+ \sum_1^\infty S^{+2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) + \sum_1^\infty S^{+1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty S^{+2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1)\\
&+ \sum_1^\infty S^{-2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw-2\mathrm{v}) + \sum_1^\infty S^{-1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty S^{-2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1)\\
&+ \sum_1^\infty S^{-2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)
\end{aligned} \tag{126}$$

*) Vgl. Kap. XII.

**) Auch von den aufgeführten Gliedern ist nur ein kleiner Teil hier zu berücksichtigen; zur Herstellung des vollständigen Ausdruckes sehe man Teil I und II.



$$+\sum_1^\infty \bar{S}_{n\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos nw \quad +\sum_0^\infty \bar{S}^{+2}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \quad +\sum_1^\infty \bar{S}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos nw$$

$$+\sum_0^\infty \bar{S}^{+2}_{n\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty \bar{S}^{+1}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \quad +\sum_0^\infty \bar{S}^{+2}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos(nw+2\mathfrak{v}_1)$$

$$+\sum_1^\infty \bar{S}^{-2}_{n\cdot1\cdot0}\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty \bar{S}^{-1}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \quad +\sum_1^\infty \bar{S}^{-2}_{n\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos(nw-2\mathfrak{v}_1)$$

$$+\sum_1^\infty \bar{S}^{-2}_{n\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1),$$

wo der gesamte konstante Teil:

$$\text{126a)}\quad \bar{a} = a_0 + a_5(\varkappa^2+\varkappa_1^2) + a_6\varkappa_1\varkappa' + a_7\varkappa'^2 + \bar{a}_5(\sin^2\iota+\sin^2\iota_1) + \bar{a}_6\sin\iota_1\sin\iota' + \bar{a}_7\sin^2\iota'$$

ist. Die Koeffizienten dieses Ausdrucks sind neben denen von R und W im III. Teil tabuliert und werden wie diese direkt aus den Tafeln entnommen; da jedoch weiter unten in den Formeln zur Berechnung der oskulierenden Elemente die Größe $2S$ vorkommt, so haben wir die S-Koeffizienten mit der doppelten Genauigkeit (bis zum Betrage von 5,20—10 oder etwa 4″) in den Tafeln angegeben*).

2. Für die charakteristischen Planeten modifiziert sich der Ausdruck für S — vgl. Teil III, S. 9 — wie folgt:

Für die Planeten vom Hestiatypus hat man

$$\begin{array}{llllll} S^{+1}_{0\cdot1\cdot0} \text{ durch } a_1, & S^{-2}_{3\cdot2\cdot0} \text{ durch } a_5, & \bar{S}^{-2}_{3\cdot2\cdot0} \text{ durch } \bar{a}_5, \\ S^{+1}_{0\cdot0\cdot1} \quad " \quad a_2, & S^{-2}_{3\cdot1\cdot1} \quad " \quad a_6, & \bar{S}^{-2}_{3\cdot1\cdot1} \quad " \quad \bar{a}_6, \\ S^{-1}_{3\cdot1\cdot0} \quad " \quad a_3, & S^{-2}_{3\cdot0\cdot2} \quad " \quad a_7, & \bar{S}^{-2}_{3\cdot0\cdot2} \quad " \quad \bar{a}_7 \\ S^{-1}_{3\cdot0\cdot1} \quad " \quad a_4, & & \end{array}$$

zu ersetzen und die Glieder

$$a_9\varkappa^2\cos(3w-2v+2\varpi) + a_{10}\varkappa\varkappa'\cos(3w-2v+\varpi+\varpi_1) + \bar{a}_9\sin^2\iota\cos(3w-2v+2\vartheta)$$

hinzuzufügen.

Für die Planeten von $\frac{1}{4}$- und $\frac{2}{5}$-Typus treten für S eigentlich keine Modifikationen ein; wir haben aber beim ersteren

$$S^{-2}_{4\cdot2\cdot0},\ S^{-2}_{4\cdot1\cdot1},\ S^{-2}_{4\cdot0\cdot2};\quad \bar{S}^{-2}_{4\cdot2\cdot0},\ \bar{S}^{-2}_{4\cdot1\cdot1},\ \bar{S}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}$$

und beim letzteren

$$S^{-2}_{5\cdot2\cdot0},\ S^{-2}_{5\cdot1\cdot1},\ S^{-2}_{5\cdot0\cdot2};\quad \bar{S}^{-2}_{5\cdot2\cdot0},\ \bar{S}^{-2}_{5\cdot1\cdot1},\ \bar{S}^{-2}_{5\cdot0\cdot2}$$

der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ bezeichnet, weil die entsprechenden Glieder charakteristischer Form sind.

Der gesamte charakteristische Teil von S ist also (vgl. Teil III, S. 12):

---

*) Vgl. Teil III, S. 82.

Für den Hestiatypus:

$$127)\quad \text{pars}\, S = a_1\eta\cos \mathrm{v} + a_2\eta'\cos \mathrm{v}_1 + a_3\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + a_4\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)$$
$$+ \alpha_5(\varkappa^2+\varkappa_1^2) + \alpha_6\varkappa_1\varkappa' + \alpha_7\varkappa'^2 + \alpha_5\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) + \alpha_6\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+ \alpha_7\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) + \alpha_9\varkappa^2\cos(3w-2v+2\omega) + \alpha_{10}\varkappa\varkappa'\cos(3w-2v+\omega+\omega_1)$$
$$+ \bar{\alpha}_5\sin^2 j\cos(3w-2\mathfrak{v}) + \bar{\alpha}_6\sin j\sin j'\cos(3w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \bar{\alpha}_7\sin^2 j'\cos(3w-2\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \bar{a}_8\sin^2\iota\cos(3w-2v+2\vartheta);$$

für den $\frac{1}{2}$-Typus:

$$128)\quad \text{pars}\, S = a_1\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v}) + a_2\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + a_3\eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1)$$
$$+ \bar{a}_1\sin^2 j\cos(4w-2\mathfrak{v}) + \bar{a}_2\sin j\sin j'\cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \bar{a}_3\sin^2 j'\cos(4w-2\mathfrak{v}_1)$$

und für den $\frac{3}{5}$-Typus wie für den vorigen, indem nur $5w$ an die Stelle von $4w$ tritt.

3. Für unser Beispiel Aegina entnehmen wir aus den Tafeln des III. Teils (oder aus den Rechnungen des II. Teils), indem wir alle Glieder bis zum Betrage 5,20—10 mitnehmen:

$$129)\quad S = (5{,}732) \quad - (6{,}356)\,\eta\cos(w-\mathrm{v}) \quad + (7{,}142)\,\eta^2\cos(2w-2\mathrm{v})$$
$$- (5{,}606)\cos w \quad + (7{,}278)\,\eta\cos(2w-\mathrm{v}) \quad + (8{,}262)\,\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})$$
$$- (6{,}185)\cos 2w \quad + (6{,}687)\,\eta\cos(3w-\mathrm{v}) \quad - (7{,}158)\,\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v})$$
$$- (5{,}806)\cos 3w \quad + (6{,}316)\,\eta\cos(4w-\mathrm{v})$$
$$- (5{,}446)\cos 4w \quad - (8{,}633)\,\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$- (6{,}883)\,\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) \quad + (7{,}643)\,\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$- (6{,}603)\,\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1).$$

4. Der Ausdruck von $\frac{dR}{dv}$ ist schon, allerdings nicht in aller Schärfe, in Teil III, Kap. III benutzt worden; auch er sollte hier mit der gleichen Genauigkeit wie S hergestellt werden, da er mit seinem doppelten Betrage in die Störungen der mittleren Länge eingeht. Dazu bedürfte es allerdings noch einer Ergänzung unserer Tafeln im III. Teil, wobei auch zu berücksichtigen wäre, daß bei der Bildung von $\frac{dR}{dv}$ aus R viele Glieder merklich vergrößert werden. Auch dies ist wieder ein Beweis, daß die Berechnung der Koordinatenstörungen, namentlich der Gyldénschen Koordinaten vor der der oskulierenden Elemente den Vorzug besitzt. Will man auch hier die bisherige Genauigkeitsgrenze scharf innehalten, so wird man einige Glieder rechnerisch nach den Formeln des II. Teils hinzufügen. Für Aegina sind die nötigen Werte a. a. O. gegeben und es ist mit derselben Genauigkeit wie S:

$$
\begin{aligned}
130)\quad \frac{dR}{dv} = &+(6{,}278)\sin w \quad +(6{,}404)\,\eta\sin(w+\mathrm{v}) \quad +(8{,}330)\,\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)\\
&-(7{,}004)\sin 2w \quad +(6{,}500)\,\eta\sin(2w+\mathrm{v}) \quad -(7{,}196)\,\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1)\\
&-(6{,}266)\sin 3w \quad +(6{,}138)\,\eta\sin(3w+\mathrm{v}) \quad -(6{,}724)\,\eta'\sin(5w-\mathrm{v}_1)\\
&-(5{,}781)\sin 4w\\
&-(5{,}366)\sin 5w \quad -(7{,}142)\,\eta\sin(2w-\mathrm{v})\\
&\qquad\qquad\qquad -(8{,}086)\,\eta\sin(3w-\mathrm{v})\\
&\qquad\qquad\qquad +(6{,}860)\,\eta\sin(4w-\mathrm{v})\\
&\qquad\qquad\qquad +(6{,}336)\,\eta\sin(5w-\mathrm{v})\\
&-(7{,}208)\,\eta^2\sin 2w \quad -(7{,}659)\,\eta\eta'\sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \quad +(7{,}886)\,\eta'^2\sin(4w-2\mathrm{v}_1)\\
&+(7{,}476)\,\eta^2\sin(2w-2\mathrm{v}) \quad -(8{,}011)\,\eta\eta'\sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \quad -(8{,}116)\,\eta'^2\sin(5w-2\mathrm{v}_1)\\
&+(7{,}291)\,\eta^2\sin(3w-2\mathrm{v}) \quad +(8{,}133)\,\eta\eta'\sin(5w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+(7{,}505)\,\eta^2\sin(4w-2\mathrm{v})\\
&-(7{,}551)\,\eta^2\sin(5w-2\mathrm{v}).
\end{aligned}
$$

5. Endlich wird noch die Größe $\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}$ gebraucht, die entweder durch Differentiation des Ausdrucks für $\Omega-\Sigma$ gewonnen oder bequemer direkt aus dem II. Teil entnommen wird; man sehe dort S. 82, 63, 90 und Tafel 36—38. Der Ausdruck für $\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}$ in Teil II, S. 82 gilt gleicherweise für gewöhnliche und charakteristische Planeten. Für Aegina verschwindet diese Größe gänzlich.

6. Die Größen S, $\frac{dR}{dv}$ und $\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}$ kann man durch Einführung der Argumente ψ, φ, φ_1 durch die Zeit als unabhängige Variable ausdrücken, wie wir es im I. Kapitel mit R und W getan haben. Wir geben hier nur das Resultat dieser Transformation für Aegina, da die Methode dort hinreichend auseinandergesetzt ist:

$$
\begin{aligned}
131)\quad S = &+(5{,}732) \quad -(6{,}298)\,\eta\cos(2\psi+\varphi) \quad +(7{,}142)\,\eta^2\cos(2\psi-2\varphi)\\
&-(5{,}606)\cos\psi \quad -(6{,}356)\,\eta\cos(\psi-\varphi) \quad +(8{,}262)\,\eta^2\cos(3\psi-2\varphi)\\
&-(6{,}185)\cos 2\psi \quad +(7{,}321)\,\eta\cos(2\psi-\varphi) \quad -(7{,}158)\,\eta^2\cos(4\psi-2\varphi)\\
&-(5{,}806)\cos 3\psi \quad +(6{,}687)\,\eta\cos(3\psi-\varphi)\\
&-(5{,}446)\cos 4\psi \quad +(6{,}316)\,\eta\cos(4\psi-\varphi) \quad -(8{,}633)\,\eta\eta'\cos(3\psi-\varphi-\varphi_1)\\
&\qquad\qquad -(6{,}883)\,\eta'\cos(3\varphi-\varphi_1) \quad +(7{,}643)\,\eta\eta'\cos(4\psi-\varphi-\varphi_1)\\
&\qquad\qquad -(6{,}603)\,\eta'\cos(4\psi-\varphi_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
132)\quad \frac{dR}{dv} = &+(6{,}278)\sin\psi && +(6{,}404)\eta\sin(\psi+\varphi) && +(8{,}330)\eta'\sin(3\psi-\varphi_1)\\
&-(7{,}004)\sin 2\psi && -(6{,}997)\eta\sin(2\psi+\varphi) && -(7{,}196)\eta'\sin(4\psi-\varphi_1)\\
&-(6{,}266)\sin 3\psi && -(6{,}345)\eta\sin(3\psi+\varphi) && -(6{,}724)\eta'\sin(5\psi-\varphi_1)\\
&-(5{,}781)\sin 4\psi && -(6{,}195)\eta\sin(4\psi+\varphi) &&\\
&-(5{,}366)\sin 5\psi && -(8{,}073)\eta\sin(3\psi-\varphi) &&\\
& && +(6{,}945)\eta\sin(4\psi-\varphi) &&\\
& && +(6{,}336)\eta\sin(5\psi-\varphi) &&\\
&-(7{,}208)\eta^2\sin 2\psi && +(8{,}306)\eta\eta'\sin(3\psi+\varphi-\varphi_1) && +(7{,}886)\eta'^2\sin(4\psi-2\varphi_1)\\
&-(8{,}062)\eta^2\sin 3\psi && -(8{,}394)\eta\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) && -(8{,}116)\eta'^2\sin(5\psi-2\varphi_1)\\
&+(7{,}476)\eta^2\sin(2\psi-2\varphi) && -(8{,}011)\eta\eta'\sin(4\psi-\varphi-\varphi_1) &&\\
&+(8{,}130)\eta^2\sin(3\psi-2\varphi) && +(8{,}133)\eta\eta'\sin(5\psi-\varphi-\varphi_1) &&\\
&+(7{,}505)\eta^2\sin(4\psi-2\varphi) && &&\\
&-(7{,}551)\eta^2\sin(5\psi-2\varphi). && &&
\end{aligned}
$$

7. Endlich können diese Ausdrücke (vgl. Kap. II) zwecks ihrer Tabulierung wieder transformiert werden, indem man setzt:

$$133)\qquad S = \Sigma A'_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma B'_n \cos\frac{n}{3}L,$$

$$134)\qquad \frac{dR}{dv} = \Sigma C'_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma D'_n \cos\frac{n}{3}L.$$

Indessen brauchen wir hier die Funktion S nicht zu tabulieren, da wir später (S. 69) eine Größe x_1 einführen und tabulieren werden und da $S = -\frac{1}{2}x_1$ ist.

$$135)\quad D'_0 = -(8{,}130)\eta^2\sin(3f-2u) + (8{,}394)\eta\eta'\sin(3f-u-u_1)$$

$$\left.\begin{matrix}C'_1\\ D'_1\end{matrix}\right\} = \pm(6{,}278)\frac{\cos}{\sin}f - (7{,}476)\eta^2\frac{\cos}{\sin}(2f-2u) \pm (7{,}505)\eta^2\frac{\cos}{\sin}(4f-2u)$$
$$\pm(8{,}011)\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(4f-u-u_1) \pm (7{,}886)\eta'^2\frac{\cos}{\sin}(4f-2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_2\\ D'_2\end{matrix}\right\} = \mp(8{,}073)\eta\frac{\cos}{\sin}(3f-u) \pm (8{,}330)\eta'\frac{\cos}{\sin}(3f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_4\\ D'_4\end{matrix}\right\} = \mp(7{,}004)\frac{\cos}{\sin}2f \mp (7{,}208)\eta^2\frac{\cos}{\sin}2f \mp (7{,}551)\eta^2\frac{\cos}{\sin}(5f-2u)$$
$$\pm(8{,}133)\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(5f-u-u_1) \mp (8{,}116)\eta'^2\frac{\cos}{\sin}(5f-2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_5\\ D'_5\end{matrix}\right\} = \pm(6{,}404)\eta\frac{\cos}{\sin}(f+u) \pm (6{,}945)\eta\frac{\cos}{\sin}(4f-u) \mp (7{,}196)\eta'\frac{\cos}{\sin}(4f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_6\\ D'_6\end{matrix}\right\} = \mp(6{,}266)\frac{\cos}{\sin}3f \mp (8{,}062)\eta^2\frac{\cos}{\sin}3f \pm (8{,}306)\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(3f+u-u_1),$$

$$135)\quad \left.\begin{matrix}C'_7\\ D'_7\end{matrix}\right\} = \mp(6{,}997)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2f+u) \pm (6{,}336)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(5f-u) \mp (6{,}724)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(3f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_8\\ D'_8\end{matrix}\right\} = \mp(5{,}781)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f, \qquad \left.\begin{matrix}C'_9\\ D'_9\end{matrix}\right\} = \mp(6{,}345)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(3f+u),$$

$$\left.\begin{matrix}C'_{10}\\ D'_{10}\end{matrix}\right\} = \mp(5{,}366)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}5f, \qquad \left.\begin{matrix}C'_{11}\\ D'_{11}\end{matrix}\right\} = \mp(6{,}195)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(4f+u)$$

oder nach weiterer Zerlegung:

$$136)\quad D'_0 = c'_{0\cdot3}\cos 3f - d'_{0\cdot3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_2\\ D'_2\end{matrix}\right\} = \pm d'_{2\cdot1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}f \mp c'_{2\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2f - d'_{2\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f + c'_{2\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f \pm d'_{2\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_3\\ D'_3\end{matrix}\right\} = \quad c'_{3\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}3f \pm d'_{3\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_4\\ D'_4\end{matrix}\right\} = \pm d'_{4\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f + c'_{4\cdot5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}5f \pm d'_{4\cdot5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}5f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_5\\ D'_5\end{matrix}\right\} = -c'_{5\cdot1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}f \pm d'_{5\cdot1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}f + c'_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f \pm d'_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_6\\ D'_6\end{matrix}\right\} = -c'_{6\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}3f \pm d'_{6\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_7\\ D'_7\end{matrix}\right\} = -c'_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2f \pm d'_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f + c'_{7\cdot5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}5f \pm d'_{7\cdot5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}5f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_8\\ D'_8\end{matrix}\right\} = \pm d'_{8\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f, \qquad \left.\begin{matrix}C'_9\\ D'_9\end{matrix}\right\} = -c'_{9\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}3f \pm d'_{9\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C'_{10}\\ D'_{10}\end{matrix}\right\} = \pm d'_{10\cdot5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}5f, \qquad \left.\begin{matrix}C'_{11}\\ D'_{11}\end{matrix}\right\} = -c'_{11\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f \pm d'_{11\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f,$$

wo:

$$137)\quad \left.\begin{matrix}c'_{0\cdot3}\\ d'_{0\cdot3}\end{matrix}\right\} = \quad (8{,}130)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u - (8{,}394)\,\eta\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}c'_{2\cdot2}\\ d'_{2\cdot2}\end{matrix}\right\} = \quad (7{,}476)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u, \qquad d'_{2\cdot1} = (6{,}278),$$

$$\left.\begin{matrix}c'_{2\cdot4}\\ d'_{2\cdot4}\end{matrix}\right\} = \quad (7{,}505)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u - (8{,}011)\,\eta\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(u+u_1) + (7{,}886)\,\eta'^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix}c'_{3\cdot3}\\ d'_{3\cdot3}\end{matrix}\right\} = -(8{,}073)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}u + (8{,}330)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}u_1, \qquad d'_{4\cdot2} = -(7{,}004) - (7{,}208)\,\eta^2,$$

$$\left.\begin{matrix}c'_{4\cdot5}\\ d'_{4\cdot5}\end{matrix}\right\} = -(7{,}551)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u + (8{,}133)\,\eta\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(u+u_1) - (8{,}116)\,\eta'^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix}c'_{5\cdot1}\\ d'_{5\cdot1}\end{matrix}\right\} = \quad (6{,}404)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}u, \qquad \left.\begin{matrix}c'_{5\cdot4}\\ d'_{5\cdot4}\end{matrix}\right\} = (6{,}945)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}u - (7{,}196)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}u_1,$$

137) $c'_{6\cdot3} = (8{,}306)\,\eta\eta'\sin(u-u_1),$

$d'_{6\cdot3} = -(6{,}266)-(8{,}062)\,\eta^2+(8{,}306)\,\eta\eta'\cos(u-u_1),$

$\left.\begin{matrix}c'_{7\cdot2}\\ d'_{7\cdot2}\end{matrix}\right\} = -(6{,}997)\,\eta\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,u, \qquad \left.\begin{matrix}c'_{7\cdot5}\\ d'_{7\cdot5}\end{matrix}\right\} = (6{,}336)\,\eta\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,u-(6{,}724)\,\eta'\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,u_1,$

$d'_{8\cdot4} = -(5{,}781), \qquad \left.\begin{matrix}c'_{9\cdot3}\\ d'_{9\cdot3}\end{matrix}\right\} = -(6{,}345)\,\eta\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,u, \qquad d'_{10\cdot5} = -(5{,}366),$

$\left.\begin{matrix}c'_{11\cdot4}\\ d'_{11\cdot4}\end{matrix}\right\} = -(6{,}195)\,\eta\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,u.$

8. Diese Größen werden zur Tabulierung berechnet, wie es S. 58 mit den entsprechenden Koeffizienten von R und W geschehen ist; die Werte von η und η' sowie die Argumente f, u, u_1 sind dort bereits gegeben. Es wird in Einheiten der 5. Dezimale*):

Jan. 0,0	$d'_{3\cdot3}$
1910	+83
1930	+83
1950	+84

$c'_{0\cdot3} = -8,\quad c'_{2\cdot2} = +1,\quad d'_{3\cdot1} = +19,\quad c'_{3\cdot4} = -4,\quad c'_{3\cdot3} = -102,$

$d'_{0\cdot3} = -14,\quad d'_{2\cdot2} = -3,\quad d'_{3\cdot4} = -2,\quad d'_{3\cdot3}$ siehe oben,

$d'_{4\cdot2} = -103,\quad c'_{4\cdot5} = +5,\quad c'_{5\cdot1} = +3,\quad c'_{5\cdot4} = +8,\quad c'_{6\cdot3} = +10,$

$d'_{4\cdot5} = +1,\quad d'_{5\cdot1} = 0,\quad d'_{5\cdot4} = -6,\quad d'_{6\cdot3} = -28,$

$c'_{7\cdot2} = -10,\quad c'_{7\cdot5} = +2,\quad d'_{8\cdot4} = -6,\quad c'_{9\cdot3} = -2,\quad d'_{10\cdot5} = -2,\quad c'_{11\cdot4} = -2,$

$d'_{7\cdot2} = -2,\quad d'_{7\cdot5} = -2,\quad d'_{9\cdot3} = 0,\quad d'_{11\cdot4} = 0.$

Hieraus ergeben sich die in Tafel 5 tabulierten Koeffizienten C', D'. Die Koeffizienten A', B' brauchen wir in diese nicht aufzunehmen, da sie durch die später eingeführten Koeffizienten K, L (Taf. 6) ersetzt werden. Man findet so durch leichte Rechnung S und $\frac{dR}{dv}$ für jede beliebige Epoche. In ähnlicher Weise wäre $\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}$ zu tabulieren, falls es bei größeren Neigungen nicht verschwindend klein wird.

9. Als die indirekte Methode**) zur Ermittlung oskulierenden Elemente wollen wir nun diejenige bezeichnen, nach welcher die Koordinaten r und v (wahre Länge in der Bahn) und ihre Ableitungen berechnet und aus ihnen die oskulierenden Elemente abgeleitet werden. Sie ist im Wesentlichen analog der sonst gebräuchlichen. Wir bezeichnen für die oskulierende Ellipse

*) Die Rechnung geschah in der S. 57 angeführten Weise.

**) Diese Methode hat auch schon Herr Kramer angewandt.

die wahre Länge in der Bahn mit v_e *),
die wahre Anomalie „ v_e,
die mittlere „ „ M_e,
„ „ Länge „ L_e,
die exzentrische Anomalie „ E,
Exzentrizität und Perihellänge, wie üblich, mit e und π,
die halbe große Axe mit a_e,
den Parameter „ $p = a_e(1-e^2)$.

Aus den Tafeln 3 und 4 für R und W und nachdem man eben dort i, Ω, Σ entnommen hat, findet man auf dem schon im IV. Kapitel angewandten Wege r, v und $v_e = v + \Omega - \Sigma$, sowie nach Tafel 5 (resp. 6)

$$S, \quad \frac{dR}{dv}, \quad \frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} \quad \text{und} \quad \frac{dv_e}{dv} = 1 + \frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}.$$

Sodann hat man aus der Relation:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \qquad \varrho = \eta\cos\mathrm{v} + R \tag{138}$$

die folgende zur Berechnung von $\frac{dr}{dv_e}$:

$$\frac{dr}{dv_e} = -\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\left(\frac{d\varrho}{dv} + \frac{a}{r}\frac{d\eta^2}{dv}\right)\frac{dv}{dv_e}, \tag{139}$$

wo (vgl. S. 19—20 im III. Teil)

$$\frac{d\varrho}{dv} = -\eta\sin\mathrm{v} + \frac{dR}{dv} + \lambda, \qquad \frac{d\eta^2}{dv} = -2\varsigma\varkappa\varkappa_1\sin(\varsigma L + \Gamma - \Gamma_1), \tag{140}$$
$$\lambda = \varsigma\varkappa\sin(L - \varsigma L - \Gamma);$$

die Größe $\frac{d\eta^2}{dv}$ kann übrigens fast immer vernachlässigt werden; auch λ ist sehr klein.

Aus der Gleichung 125) hat man andererseits:

$$r^2\frac{dv_e}{dt} = \frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\frac{dv_e}{dv}. \tag{141}$$

Man findet nach bekannten Formeln den Parameter aus

$$\sqrt{p} = \sqrt{a_e(1-e^2)} = \frac{r^2}{k}\frac{dv_e}{dt} = \frac{\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\frac{dv_e}{dv}, \tag{142}$$

*) Die wahre Länge v zählen wir von dem beweglichen Punkte x_1 (siehe die Figur Teil III, S. 7); während v_e vom Frühlingspunkt gezählt wird; die heliozentrischen Koordinaten ergeben sich aus den Konstanten für den Aequator nach den Formeln (s. S. 37)

$$x = ar\cos(A+v_e), \qquad y = br\sin(B+v_e), \qquad z = cr\sin(C+v_e).$$

und sodann Exzentrizität und Perihellänge aus der Gleichung

$$143)\qquad r = \frac{p}{1+e\cos \mathrm{v}_e}, \qquad \mathrm{v}_e = v_e - \varkappa$$

und ihrer Ableitung, nämlich aus:

$$144)\qquad e\cos \mathrm{v}_e = \frac{p}{r} - 1,$$

$$145)\qquad e\sin \mathrm{v}_e = \frac{p}{r^2}\frac{dr}{dv_e}.$$

Aus v_e findet man endlich die mittlere Anomalie resp. Länge vermittelst*)

$$146)\qquad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}_e}{2},$$

oder besser

$$146a)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{v}_e - E) = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_e \sin \mathrm{v}_e \sqrt{\frac{r}{p}}, \qquad \sin\varphi_e = e,$$

$$147)\qquad M_e = E - e\sin E,$$

$$148)\qquad L_e = M_e + \varkappa = v_e - (\mathrm{v}_e - M_e).$$

Um die Größe $\frac{p}{r}-1$ in der Gleichung 144) schärfer zu berechnen, ist es zweckmäßig, sie zu transformieren. Sie wird nämlich

$$149)\qquad \frac{p}{r} - 1 = \frac{p(1+\eta\cos \mathrm{v} + R)}{a(1-\eta^2)} - 1 = \frac{1+\eta\cos \mathrm{v}+R}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{\eta\cos \mathrm{v}+R}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 - \frac{2S+S^2}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 + 2\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} + \left(\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}\right)^2.$$

Man wird meist setzen können:

$$149a)\qquad \begin{aligned} e\cos \mathrm{v}_e &= \frac{\varrho - 2S}{(1+S)^2}, \\ e\sin \mathrm{v}_e &= -\frac{1}{(1+S)^2}\frac{d\varrho}{dv}. \end{aligned}$$

---

*) Man erhält die größte Schärfe, wenn man aus 146a) und 147) $\mathrm{v}_e - E$ und $E - M_e$, und hieraus $\mathrm{v}_e - M_e = v_e - L_e$ rechnet, und mit der letzteren Größe die Verwandlung von wahrer Länge in mittlere vornimmt; die Unsicherheit in der Perihellänge, die bei kleinen Exzentrizitäten sehr groß sein kann, hat dann keinen Einfluß.

Zehntes Kapitel.

Die oskulierenden Elemente; direkte Methode.

1. Die direkte Methode wollen wir die nennen, nach der wir direkt aus den Gyldénschen Koordinaten die Störungen der Bahnelemente ableiten, diese Störungen so verstanden, daß sie zu unseren Bahnelementen hinzugefügt die oskulierenden Elemente ergeben.

Wir setzen nämlich

$$150)\quad \begin{aligned} a_e &= a + \delta a, & e &= \eta + \delta e, & M_e &= M + \delta M, \\ n_e &= n + \delta n, & \mathrm{v}_e &= \mathrm{v} + \delta \mathrm{v}, & L_e &= L + \delta L, \\ p &= a(1-\eta^2) + \delta p, & v_e &= v + \delta v, & L_e &= M_e + \varkappa, \\ & & \varkappa &= \Pi + \delta\varkappa - (\Omega - \Sigma), \end{aligned}$$

wo wir außer den bereits im vorigen Kapitel eingeführten Bezeichnungen noch n_e für die oskulierende mittlere Bewegung gesetzt haben und wo zu bemerken ist, daß die bereits ermittelten Größen η und Π nicht konstant sind, sondern die „sekularen" Störungen enthalten. Uebrigens ist

$$\delta v = \Omega - \Sigma$$

bereits bekannt und

$$151)\quad \delta\varkappa = -\delta \mathrm{v}.$$

Wir setzen nämlich voraus, daß nach dem vorigen Kapitel die Größen S, $\frac{dR}{dv}$, $\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}$ und ebenso nach unseren Tafeln i, Ω und Σ schon ermittelt sind.

2. Die Gleichung 142) können wir schreiben:

$$152)\quad p = \frac{a(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 = a(1-\eta^2)(1+x_1),$$

wenn wir bezeichnen

$$153)\quad 1 + x_1 = \frac{1}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2.$$

Dann wird

$$154)\quad \delta p = a(1-\eta^2)x_1 \quad \text{oder} \quad p = a(1-\eta^2)(1+x_1)$$

und x_1 kann aus der Gleichung

$$155)\quad x_1 = (-2S + 3S^2 - \cdots)\left(1 + \frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}\right)^2 + 2\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} + \left(\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv}\right)^2$$

bestimmt werden, für die man fast immer mit ausreichender Genauigkeit setzen kann:

155a) $$x_1 = -2S.$$

3. Aus den Gleichungen 144), 145), 149), 139), 140), 142) ergibt sich ferner

156) $$\begin{aligned} e\cos \mathrm{v}_e &= \eta \cos \mathrm{v} + \xi_1, \\ e \sin \mathrm{v}_e &= \eta \sin \mathrm{v} + \xi_2, \end{aligned}$$

wo

157) $$\xi_1 = (1+\eta\cos \mathrm{v})\left\{\frac{1}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 - 1\right\} + \frac{R}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2,$$

158) $$\xi_2 = \eta \sin \mathrm{v}\left\{\frac{1}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2 - 1\right\} - \left\{\frac{dR}{dv} + \lambda + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\right\}\frac{1}{(1+S)^2}\left(\frac{dv_e}{dv}\right)^2$$

gesetzt ist. Setzt man noch

159) $$y_1 = -\left(\lambda + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\right)(1+x_1)\left(1 + \frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv}\right) + \left(\eta \sin \mathrm{v} - \frac{dR}{dv}\right)(1+x_1)\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv},$$

wo y_1 außerordentlich klein und fast immer

159a) $$y_1 = -\lambda = -\varsigma\varkappa \sin(v - \varpi)$$

gesetzt werden kann, so wird:

160) $$\xi_1 = x_1(1+\eta\cos \mathrm{v}) + R(1+x_1),$$

161) $$\xi_2 = x_1 \eta \sin \mathrm{v} - \frac{dR}{dv}(1+x_1) + y_1.$$

Die Gleichungen 156) können zur Bestimmung von e von v_e dienen; indessen lassen sie sich noch bequemer gestalten. Multipliziert man sie mit $\cos \mathrm{v}$ resp. $\sin \mathrm{v}$ und andererseits mit $\sin \mathrm{v}$ resp. $\cos \mathrm{v}$ und addiert, so kommt

162) $$\begin{aligned} e\cos\delta\mathrm{v} &= \eta + \xi_3 \\ e \sin \delta\mathrm{v} &= \xi_4 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} e\cos\delta\varkappa &= \eta + \xi_3, \\ e\sin\delta\varkappa &= -\xi_4, \end{aligned}$$

wo

163) $$\begin{aligned} \xi_3 &= \xi_1 \cos \mathrm{v} + \xi_2 \sin \mathrm{v}, \\ \xi_4 &= -\xi_1 \sin \mathrm{v} + \xi_2 \cos \mathrm{v} \end{aligned}$$

oder auch

164) $$\begin{aligned} \xi_3 &= x_1 \cos \mathrm{v} + x_1\eta + \left(R\cos \mathrm{v} - \frac{dR}{dv}\sin \mathrm{v}\right)(1+x_1) + y_1 \sin \mathrm{v}, \\ \xi_4 &= -x_1 \sin \mathrm{v} - \left(R \sin \mathrm{v} + \frac{dR}{dv}\cos \mathrm{v}\right)(1+x_1) + y_1 \cos \mathrm{v}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 162) sind besonders zweckmäßig zur Bestimmung von e und δv und damit auch von δx, da sie bei beliebig kleiner Exzentrizität, bei welcher δv und δx beliebig groß werden können, anwendbar sind.

4. Will man jedoch, was weniger zweckmäßig ist, die Gleichungen für δe und δv resp. δx getrennt herstellen, so ergibt sich aus 162) zunächst

$$e^2 = \eta^2 + x_2(1-\eta^2), \tag{165}$$

wenn wir

$$x_2 = \frac{1}{1-\eta^2}(2\eta\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_4^2) \tag{166}$$

setzen, also

$$2\eta\,\delta e + \delta e^2 = x_2(1-\eta^2). \tag{167}$$

Diese Gleichung wird man aber verschieden zu behandeln haben, je nachdem η sehr klein ist oder nicht; in letzterem Falle kann man entwickeln

$$\delta e = \frac{1-\eta^2}{2\eta}x_2 - \frac{(1-\eta^2)^2}{8\eta^3}x_2^2 \pm \cdots.$$

Ist dagegen $2\eta\,\delta e$ klein gegen δe^2, so hat man in erster Näherung

$$\delta e = \sqrt{x_2},$$

wobei aber Zweifel über das Vorzeichen entstehen können. Für δv hätte man

$$\operatorname{tg}\delta v = \frac{\xi_4}{\eta + \xi_3}.$$

5. Wir wollen auch noch den Ausdruck für δa entwickeln, obwohl a_e bereits durch p und e bestimmt ist; zur Kontrolle wird aber diese zweite Bestimmungsart von a_e willkommen sein. Aus 152) folgt

$$a_e = \frac{a(1-\eta^2)}{1-e^2}(1+x_1) \tag{168}$$

also, da $\dfrac{1-e^2}{1-\eta^2} = 1 - x_2$:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{1+x_1}{1-x_2} - 1 = \frac{x_1+x_2}{1-x_2}. \tag{169}$$

6. Es erübrigt nun nur noch die Darstellung von δL, welche etwas umständlicher ist. Wir erinnern zur besseren Uebersicht an die analogen Relationen:

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon - \eta \sin \varepsilon, & M_e &= E - e \sin E, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon, & \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_e &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E, \end{aligned} \tag{170}$$

aus welchen folgt

$$171)\qquad \cos\varepsilon = \frac{\eta + \cos \mathrm{v}}{1 + \eta\cos \mathrm{v}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin \mathrm{v}}{1+\eta\cos \mathrm{v}}$$

und also

$$172)\qquad \sin(\varepsilon - \mathrm{v}) = \frac{(\sqrt{1-\eta^2}-1)\cos \mathrm{v} - \eta}{1+\eta\cos \mathrm{v}}\sin \mathrm{v}.$$

Bezeichnet man der Kürze halber für den Augenblick

$$173)\qquad x = \eta\cos \mathrm{v}$$

und entwickelt man in 172) noch Potenzen von η, so wird bis zu den Gliedern 5. Grades inklusive:

$$\sin(\varepsilon - \mathrm{v}) = (-1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}\eta^2 x + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{8}\eta^2 x^2 - \tfrac{1}{2}x^4)\,\eta\sin \mathrm{v}$$

und

$$\varepsilon - \mathrm{v} = (-1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}\eta^2 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{8}\eta^2 x + \tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{3}{40}\eta^4 - \tfrac{1}{10}\eta^2 x^2 - \tfrac{1}{5}x^4)\,\eta\sin \mathrm{v}.$$

Ebenso wird durch Entwicklung des Ausdrucks 171) für $\sin\varepsilon$

$$\eta\sin\varepsilon = (1 - x - \tfrac{1}{2}\eta^2 + x^2 + \tfrac{1}{2}\eta^2 x - x^3 - \tfrac{1}{8}\eta^4 - \tfrac{1}{2}\eta^2 x^2 + x^4)\,\eta\sin \mathrm{v},$$

also

$$174)\qquad M - \mathrm{v} = (-2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{3}\eta^2 - \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{3}{8}\eta^2 x + \tfrac{5}{4}x^3 + \tfrac{1}{20}x^4 + \tfrac{2}{5}\eta^2 x^2 - \tfrac{6}{5}x^4)\,\eta\sin \mathrm{v}.$$

Diese Gleichung gibt die Mittelpunktsgleichung, entwickelt nach Potenzen von x und η^2, im Gegensatz zu der Entwicklung nach Vielfachen von v*):

$$M - \mathrm{v} = \Sigma B_n \sin n\mathrm{v}.$$

In ganz ähnlicher Weise ist für die oskulierende Ellipse:

$$175)\qquad M_e - \mathrm{v}_e = (-2 + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{1}{3}e^2 - \tfrac{4}{3}y^2 - \tfrac{3}{8}e^2 y + \tfrac{5}{4}y^3 + \tfrac{1}{20}e^4 + \tfrac{2}{5}e^2 y^2 - \tfrac{6}{5}y^4)\,e\sin \mathrm{v}_e,$$

wo für den Augenblick

$$176)\qquad y = e\cos \mathrm{v}_e$$

gesetzt ist.

Nun ist aber nach 156)

$$\begin{aligned} y &= x + \xi_1, \\ e^2 &= \eta^2 + 2\xi_1 x + 2\xi_2\eta\sin \mathrm{v} + \xi_1^2 + \xi_2^2, \\ e\sin \mathrm{v}_e &= \eta\sin \mathrm{v} + \xi_2. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in 175) ein und berücksichtigt wieder die 5. Potenzen, indem man jedoch die 3. Potenzen von ξ_1 und ξ_2 vernachlässigt, so kommt:

---

*) Vgl. Teil III, S. 6—7.

$$177)\quad \begin{aligned} M_e - \mathrm{v}_e = & (-2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{3}\eta^2 - \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{3}{8}\eta^2 x + \tfrac{5}{4}x^3 + \tfrac{1}{20}\eta^4 + \tfrac{2}{5}\eta^2 x^2 - \tfrac{6}{5}x^4)\,\eta \sin \mathrm{v} \\ & + (\tfrac{3}{2} - 2x - \tfrac{3}{8}\eta^2 + 3x^2 + \eta^2 x - 4x^3)\,\xi_1 \eta \sin \mathrm{v} \\ & + (-2 + \tfrac{3}{2}x + \eta^2 - 2x^2 - \tfrac{9}{8}\eta^2 x + 2x^3 + \tfrac{1}{4}\eta^4 + \eta^2 x^2 - 2x^4)\,\xi_2 \\ & + (-1 + \tfrac{21}{8}x + \tfrac{1}{2}\eta^2 - 5x^2)\,\xi_1^2 \eta \sin \mathrm{v} \\ & + (\tfrac{3}{2} - 2x - \tfrac{9}{8}\eta^2 + \tfrac{15}{4}x^2 + 3\eta^2 x - 6x^3)\,\xi_1 \xi_2 \\ & + (1 - \tfrac{9}{8}x + \tfrac{1}{2}\eta^2 + x^2)\,\xi_2^2 \eta \sin \mathrm{v}. \end{aligned}$$

Zieht man die Gleichung 174) von der vorstehenden ab und ordnet man nach Vielfachen von v, indem man für x seinen Wert $\eta \cos \mathrm{v}$ einsetzt und bedenkt man, daß

$$178)\quad \begin{aligned} M_e &= L_e - \pi, \\ M &= L - \Pi - W, \end{aligned} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} \delta L &= \delta M + \delta\pi - W + (\Omega - \Sigma), \\ &= \delta M - \delta \mathrm{v} - W + (\Omega - \Sigma), \end{aligned}$$

so wird

$$179)\quad \begin{aligned} \delta L = & \left\{-2 + (\tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{3}{8}\eta^3)\cos \mathrm{v} - (\eta^2 + \tfrac{1}{2}\eta^4)\cos 2\mathrm{v} + \tfrac{1}{2}\eta^3 \cos 3\mathrm{v} - \tfrac{1}{4}\eta^4 \cos 4\mathrm{v}\right\}\xi_2 \\ & + \left\{(\tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{3}{8}\eta^3)\sin \mathrm{v} - (\eta^2 + \tfrac{1}{2}\eta^4)\sin 2\mathrm{v} + \tfrac{3}{4}\eta^3 \sin 3\mathrm{v} - \tfrac{1}{2}\eta^4 \sin 4\mathrm{v}\right\}\xi_1 \\ & + \left\{\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\eta^2 - (2\eta + \tfrac{3}{2}\eta^3)\cos \mathrm{v} + \tfrac{15}{8}\eta^2 \cos 2\mathrm{v} - \tfrac{3}{2}\eta^3 \cos 3\mathrm{v}\right\}\xi_1 \xi_2 \\ & + \left\{-(\eta + \tfrac{3}{4}\eta^3)\sin \mathrm{v} + \tfrac{21}{16}\eta^2 \sin 2\mathrm{v} - \tfrac{5}{4}\eta^3 \sin 3\mathrm{v}\right\}\xi_1^2 \\ & + \left\{(\eta + \tfrac{3}{4}\eta^3)\sin \mathrm{v} - \tfrac{9}{16}\eta^2 \sin 2\mathrm{v} + \tfrac{1}{4}\eta^3 \sin 3\mathrm{v}\right\}\xi_2^2 \\ & - W + (\Omega - \Sigma). \end{aligned}$$

In den meisten Fällen wird man nur wenige der vorstehenden Glieder zu berücksichtigen brauchen; für Aegina genügt es zu setzen:

$$179\text{a})\quad \delta L = -2\xi_2 - W + \tfrac{3}{2}(\xi_1 \eta \sin \mathrm{v} + \xi_2 \eta \cos \mathrm{v}).$$

7. Wünscht man endlich noch die Störungen der mittleren Bewegung δn direkt darzustellen, so hat man aus

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}:$$

mit Vernachlässigung der 3. Potenz von δa:

$$180)\quad \frac{\delta n}{n} = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta a}{a} + \tfrac{15}{8}\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2.$$

Hat man aus unseren Tafeln R, W, S und $\dfrac{dR}{dv}$ berechnet, so findet man also der Reihe nach $x_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, x_2$ und sodann $e, \delta\pi, \dfrac{\delta a}{a}, \delta p, \delta L$, wobei man zur Kontrolle eine doppelte Bestimmung von δp erhält.

8. Man kann nun aber auch, anstatt in dieser Weise die Störungen der elliptischen Elemente aus unseren Gyldénschen Koordinaten im einzelnen zu berechnen, was freilich das schärfste Resultat gibt, auch die Ausdrücke für diese Störungen unmittelbar herstellen. Dazu hat man die für $R, W, S, \dfrac{dR}{dv}$ gefundenen

Ausdrücke 47) bis 49) des III. Teils und 129) und 130) dieses Teils in die Gleichungen 155), 160), 161), 163) oder 164), 165), für $x_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, x_2$ einzusetzen und hiernach noch $\frac{\delta a}{a}$ und δL (Gl. 169) und 179)) zu bilden; e, $\delta\pi$ und δp bestimmen sich dann aus 162) und 154).

9. Man hat zunächst innerhalb unserer Genauigkeitsgrenze $x_1 = -2S$.

Sodann führen wir entsprechend unserer Bezeichnungsweise für ξ_1 und ξ_2 die folgenden Bezeichnungen ein, wobei wir aber die vom Quadrat der Neigung abhängigen Glieder der Kürze halber fortlassen; man kann sie, wo nötig, leicht ergänzen.

$$181)\quad \xi_1 = \sum_0^\infty Y_{n\cdot0\cdot0}\cos nw + \sum_0^\infty Y^{+1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \sum_0^\infty Y^{+1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$+ \sum_1^\infty Y^{-1}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \sum_1^\infty Y^{-1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)$$
$$+ \sum_1^\infty Y_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos nw + \sum_0^\infty Y^{+2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty Y_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos nw$$
$$+ \sum_0^\infty Y^{+2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) + \sum_0^\infty Y^{+1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \sum_0^\infty Y^{+2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1)$$
$$+ \sum_1^\infty Y^{-2}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw-2\mathrm{v}) + \sum_1^\infty Y^{-1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \sum_1^\infty Y^{-2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1)$$
$$+ \sum_1^\infty Y^{-2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1),$$

$$182)\quad \xi = \sum_1^\infty Z_{n\cdot0\cdot0}\sin nw \text{ u. s. w. analog dem vorigen Ausdruck } -\varrho\varkappa\sin(v-\varpi),$$

womit sich nach Gleichung 157) und 158) ergibt:

$$183)\quad \begin{aligned}
Y_{n\cdot0\cdot0} &= R_{n\cdot0\cdot0} - 2S_{n\cdot0\cdot0}, & Y_{0\cdot0\cdot0} &= b_0 - 2a_0 = -3b_0,\\
Y^{+1}_{n\cdot1\cdot0} &= R^{+1}_{n\cdot1\cdot0} - 2S^{+1}_{n\cdot1\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0}, & Y^{+1}_{0\cdot1\cdot0} &= -2a_0,\\
Y^{-1}_{n\cdot1\cdot0} &= R^{-1}_{n\cdot1\cdot0} - 2S^{-1}_{n\cdot1\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0}, & Y^{-1}_{0\cdot1\cdot0} &= 0,\\
Y^{+1}_{n\cdot0\cdot1} &= R^{+1}_{n\cdot0\cdot1} - 2S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{+1}_{0\cdot0\cdot1} &= -2S^{+1}_{0\cdot0\cdot1},\\
Y^{-1}_{n\cdot0\cdot1} &= R^{-1}_{n\cdot0\cdot1} - 2S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{-1}_{0\cdot0\cdot1} &= 0,\\
Y_{n\cdot2\cdot0} &= R_{n\cdot2\cdot0} - 2S_{n\cdot2\cdot0} - S^{+1}_{n\cdot1\cdot0} - S^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, & Y_{0\cdot2\cdot0} &= 0,\\
Y^{+2}_{n\cdot2\cdot0} &= R^{+2}_{n\cdot2\cdot0} - 2S^{+2}_{n\cdot2\cdot0} - S^{+1}_{n\cdot1\cdot0}, & Y^{+2}_{0\cdot2\cdot0} &= R^{+2}_{0\cdot2\cdot0},\\
Y^{-2}_{n\cdot2\cdot0} &= R^{-2}_{n\cdot2\cdot0} - 2S^{-2}_{n\cdot2\cdot0} - S^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, & Y^{-2}_{0\cdot2\cdot0} &= 0,\\
Y^{+2}_{n\cdot1\cdot1} &= R^{+2}_{n\cdot1\cdot1} - 2S^{+2}_{n\cdot1\cdot1} - S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{+2}_{0\cdot1\cdot1} &= R^{+2}_{0\cdot1\cdot1} - 2S^{+2}_{0\cdot1\cdot1} - S^{+1}_{0\cdot0\cdot1},\\
Y^{+1}_{n\cdot1\cdot1} &= R^{+1}_{n\cdot1\cdot1} - 2S^{+1}_{n\cdot1\cdot1} - S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{+1}_{0\cdot1\cdot1} &= -S^{+1}_{0\cdot0\cdot1},\\
Y^{-1}_{n\cdot1\cdot1} &= R^{-1}_{n\cdot1\cdot1} - 2S^{-1}_{n\cdot1\cdot1} - S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{-1}_{0\cdot1\cdot1} &= 0,\\
Y^{-2}_{n\cdot1\cdot1} &= R^{-2}_{n\cdot1\cdot1} - 2S^{-2}_{n\cdot1\cdot1} - S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, & Y^{-2}_{0\cdot1\cdot1} &= 0,
\end{aligned}$$

183)
$$Y_{n\cdot0\cdot2} = R_{n\cdot0\cdot2} - 2S_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Y_{0\cdot0\cdot2} = 0,$$
$$Y^{+2}_{n\cdot0\cdot2} = R^{+2}_{n\cdot0\cdot2} - 2S^{+2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Y^{+2}_{0\cdot0\cdot2} = R^{+2}_{0\cdot0\cdot2} - 2S^{+2}_{0\cdot0\cdot2},$$
$$Y^{-2}_{n\cdot0\cdot2} = R^{-2}_{n\cdot0\cdot2} - 2S^{-2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Y^{-2}_{0\cdot0\cdot2} = 0.$$

184)
$$Z_{n\cdot0\cdot0} = n(1-\mu)R_{n\cdot0\cdot0}, \qquad Z_{0\cdot0\cdot0} = 0,$$

$$Z^{+1}_{n\cdot1\cdot0} = [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot1\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0}, \qquad Z^{+1}_{0\cdot1\cdot0} = -2a_0,$$
$$Z^{-1}_{n\cdot1\cdot0} = [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot1\cdot0} + S_{n\cdot0\cdot0}, \qquad Z^{-1}_{0\cdot1\cdot0} = 0,$$

$$Z^{+1}_{n\cdot0\cdot1} = [n(1-\mu)+1]R^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{+1}_{0\cdot0\cdot1} = 0,$$
$$Z^{-1}_{n\cdot0\cdot1} = [n(1-\mu)-1]R^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{-1}_{0\cdot0\cdot1} = 0,$$

$$Z_{n\cdot2\cdot0} = n(1-\mu)R_{n\cdot2\cdot0} + S^{+1}_{n\cdot1\cdot0} - S^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad Z_{0\cdot2\cdot0} = 0,$$
$$Z^{+2}_{n\cdot2\cdot0} = [n(1-\mu)+2]R^{+2}_{n\cdot2\cdot0} - S^{+1}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad Z^{+2}_{0\cdot2\cdot0} = 2R^{+2}_{0\cdot2\cdot0},$$
$$Z^{-2}_{n\cdot2\cdot0} = [n(1-\mu)-2]R^{-2}_{n\cdot2\cdot0} + S^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad Z^{-2}_{0\cdot2\cdot0} = 0,$$

$$Z^{+2}_{n\cdot1\cdot1} = [n(1-\mu)+2]R^{+2}_{n\cdot1\cdot1} - S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{+2}_{0\cdot1\cdot1} = 2R^{+2}_{0\cdot1\cdot1} - S^{+1}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$Z^{+1}_{n\cdot1\cdot1} = n(1-\mu)R^{+1}_{n\cdot1\cdot1} - S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{+1}_{0\cdot1\cdot1} = -S^{+1}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$Z^{-1}_{n\cdot1\cdot1} = n(1-\mu)R^{-1}_{n\cdot1\cdot1} + S^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{-1}_{0\cdot1\cdot1} = 0,$$
$$Z^{-2}_{n\cdot1\cdot1} = [n(1-\mu)-2]R^{-2}_{n\cdot1\cdot1} + S^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad Z^{-2}_{0\cdot1\cdot1} = 0,$$

$$Z_{n\cdot0\cdot2} = n(1-\mu)R_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Z_{0\cdot0\cdot2} = 0,$$
$$Z^{+2}_{n\cdot0\cdot2} = [n(1-\mu)+2]R^{+2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Z^{+2}_{0\cdot0\cdot2} = 2R^{+2}_{0\cdot0\cdot2},$$
$$Z^{-2}_{n\cdot0\cdot2} = [n(1-\mu)-2]R^{-2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad Z^{-2}_{0\cdot0\cdot2} = 0.$$

10. Sodann führen wir die Bezeichnungen ein:

185)
$$\begin{aligned}
\xi_3 = {} & \Sigma M^{+1}_{n\cdot0\cdot0}\cos(nw+\mathrm{v}) + \Sigma M^{-1}_{n\cdot0\cdot0}\cos(nw-\mathrm{v}) \\
& + \Sigma M_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos nw + \Sigma M^{+2}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+2\mathrm{v}) + \Sigma M^{-2}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-2\mathrm{v}) \\
& + \Sigma M^{+2}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{+1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{-1}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{-2}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma M^{+3}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw+3\mathrm{v}) + \Sigma M^{+1}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw+\mathrm{v}) + \Sigma M^{-1}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw-\mathrm{v}) + \Sigma M^{-3}_{n\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(nw-3\mathrm{v}) \\
& + \Sigma M^{+3}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{+2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{+1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma M^{-1}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{-2}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{-3}_{n\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(nw-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma M^{+3}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw+\mathrm{v}+2\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{+2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw-\mathrm{v}+2\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{+1}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw+\mathrm{v}) \\
& + \Sigma M^{-1}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw-\mathrm{v}) + \Sigma M^{-2}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) + \Sigma M^{-3}_{n\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(nw-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1(\\
& - \tfrac{1}{2}\varsigma\varkappa\cos(\Pi-\omega) + \tfrac{1}{2}\varsigma\varkappa\cos(2v-\Pi-\omega).
\end{aligned}$$

186)
$$\xi_4 = \begin{matrix}\Sigma N^{+1}_{n\cdot0\cdot0}\sin(nw+\mathrm{v}) \\ +\Sigma N^{-1}_{n\cdot0\cdot0}\sin(nw-\mathrm{v})\end{matrix} + \text{u.s.w. analog dem vorigen Ausdruck} \begin{matrix}-\tfrac{1}{2}\varsigma\varkappa\sin(\Pi-\omega) \\ -\tfrac{1}{2}\varsigma\varkappa\sin(2v-\Pi-\omega).\end{matrix}$$

wo sich ergibt:

187) $$M^{+1}_{n\cdot0\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y_{n\cdot0\cdot0}-\tfrac{1}{2}Z_{n\cdot0\cdot0}, \qquad M^{+1}_{0\cdot0\cdot0}=Y_{0\cdot0\cdot0},$$
$$M^{-1}_{n\cdot0\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y_{n\cdot0\cdot0}+\tfrac{1}{2}Z_{n\cdot0\cdot0}, \qquad M^{-1}_{0\cdot0\cdot0}=0,$$
$$M_{n\cdot1\cdot0}=\tfrac{1}{2}(Y^{+1}_{n\cdot1\cdot0}+Y^{-1}_{n\cdot1\cdot0})+\tfrac{1}{2}(Z^{+1}_{n\cdot1\cdot0}-Z^{-1}_{n\cdot1\cdot0}), \qquad M_{0\cdot1\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{0\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}Z^{+1}_{0\cdot1\cdot0},$$
$$M^{+2}_{n\cdot1\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{n\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}Z^{+1}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad M^{+2}_{0\cdot1\cdot0}=0,$$
$$M^{-2}_{n\cdot1\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{-1}_{n\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}Z^{-1}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad M^{-2}_{0\cdot1\cdot0}=0,$$

$$M^{+2}_{n\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{n\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}Z^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad M^{+2}_{0\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$M^{+1}_{n\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{-1}_{n\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}Z^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad M^{+1}_{0\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$M^{-1}_{n\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{n\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}Z^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad M^{-1}_{0\cdot0\cdot1}=0,$$
$$M^{-2}_{n\cdot0\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{-1}_{n\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}Z^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad M^{+2}_{0\cdot0\cdot1}=0,$$

$$M^{+3}_{n\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{n\cdot2\cdot0}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{n\cdot2\cdot0}, \qquad M^{+3}_{0\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{0\cdot2\cdot0}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{0\cdot2\cdot0},$$
$$M^{+1}_{n\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}(Y_{n\cdot2\cdot0}+Y^{+2}_{n\cdot2\cdot0})-\tfrac{1}{2}(Z_{n\cdot2\cdot0}-Z^{+2}_{n\cdot2\cdot0}), \qquad M^{+1}_{0\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{0\cdot2\cdot0}+\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{0\cdot2\cdot0},$$
$$M^{-1}_{n\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}(Y_{n\cdot2\cdot0}+Y^{-2}_{n\cdot2\cdot0})+\tfrac{1}{2}(Z_{n\cdot2\cdot0}-Z^{-2}_{n\cdot2\cdot0}), \qquad M^{-1}_{0\cdot2\cdot0}=0,$$
$$M^{-3}_{n\cdot2\cdot0}=\tfrac{1}{2}Y^{-2}_{n\cdot2\cdot0}+\tfrac{1}{2}Z^{-2}_{n\cdot2\cdot0}, \qquad M^{-3}_{0\cdot2\cdot0}=0,$$

$$M^{+3}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{n\cdot1\cdot1}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{n\cdot1\cdot1}, \qquad M^{+3}_{0\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{0\cdot1\cdot1}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{0\cdot1\cdot1},$$
$$M^{+2}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{+1}_{n\cdot1\cdot1}-\tfrac{1}{2}Z^{+1}_{n\cdot1\cdot1}, \qquad M^{+2}_{0\cdot1\cdot1}=0,$$
$$M^{+1}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}(Y^{+2}_{n\cdot1\cdot1}+Y^{-1}_{n\cdot1\cdot1})+\tfrac{1}{2}(Z^{+2}_{n\cdot1\cdot1}-Z^{-1}_{n\cdot1\cdot1}), \qquad M^{+1}_{0\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}(Y^{+2}_{0\cdot1\cdot1}+Y^{+1}_{0\cdot1\cdot1})+\tfrac{1}{2}(Z^{+2}_{0\cdot1\cdot1}+Z^{+1}_{0\cdot1\cdot1}),$$
$$M^{-1}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}(Y^{+1}_{n\cdot1\cdot1}+Y^{-2}_{n\cdot1\cdot1})+\tfrac{1}{2}(Z^{+1}_{n\cdot1\cdot1}-Z^{-2}_{n\cdot1\cdot1}), \qquad M^{-1}_{0\cdot1\cdot1}=0,$$
$$M^{-2}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{-1}_{n\cdot1\cdot1}+\tfrac{1}{2}Z^{-1}_{n\cdot1\cdot1}, \qquad M^{-2}_{0\cdot1\cdot1}=0,$$
$$M^{-3}_{n\cdot1\cdot1}=\tfrac{1}{2}Y^{-2}_{n\cdot1\cdot1}+\tfrac{1}{2}Z^{-2}_{n\cdot1\cdot1}, \qquad M^{-3}_{0\cdot1\cdot1}=0,$$

$$M^{+3}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{n\cdot0\cdot2}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{+3}_{0\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{0\cdot0\cdot2}-\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{0\cdot0\cdot2},$$
$$M^{+2}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{n\cdot0\cdot2}+\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{+2}_{0\cdot0\cdot2}=0,$$
$$M^{+1}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y_{n\cdot0\cdot2}-\tfrac{1}{2}Z_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{+1}_{0\cdot0\cdot2}=0,$$
$$M^{-1}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y_{n\cdot0\cdot2}+\tfrac{1}{2}Z_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{-1}_{0\cdot0\cdot2}=0,$$
$$M^{-2}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{-2}_{n\cdot0\cdot2}-\tfrac{1}{2}Z^{-2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{-2}_{0\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{+2}_{0\cdot0\cdot2}+\tfrac{1}{2}Z^{+2}_{0\cdot0\cdot2},$$
$$M^{-3}_{n\cdot0\cdot2}=\tfrac{1}{2}Y^{-2}_{n\cdot0\cdot2}+\tfrac{1}{2}Z^{-2}_{n\cdot0\cdot2}, \qquad M^{-3}_{0\cdot0\cdot2}=0.$$

188) $$N^{+1}_{n\cdot0\cdot0}=-M^{+1}_{n\cdot0\cdot0}, \qquad N^{+1}_{0\cdot0\cdot0}=-Y_{0\cdot0\cdot0},$$
$$N^{-1}_{n\cdot0\cdot0}=\quad M^{-1}_{n\cdot0\cdot0}, \qquad N^{-1}_{0\cdot0\cdot0}=0,$$
$$N_{n\cdot1\cdot0}=\tfrac{1}{2}(Y^{+1}_{n\cdot1\cdot0}-Y^{-1}_{n\cdot1\cdot0})+\tfrac{1}{2}(Z^{+1}_{n\cdot1\cdot0}-Z^{-1}_{n\cdot1\cdot0}), \qquad N_{0\cdot1\cdot0}=0,$$
$$N^{+2}_{n\cdot1\cdot0}=-M^{+2}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad N^{+2}_{0\cdot1\cdot0}=0,$$
$$N^{-2}_{n\cdot1\cdot0}=\quad M^{-2}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad N^{-2}_{0\cdot1\cdot0}=0,$$
$$N^{+2}_{n\cdot0\cdot1}=-M^{+2}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad N^{+2}_{0\cdot0\cdot1}=-M^{+2}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$N^{+1}_{n\cdot0\cdot1}=-M^{+1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad N^{+1}_{0\cdot0\cdot1}=-M^{+1}_{0\cdot0\cdot1},$$
$$N^{-1}_{n\cdot0\cdot1}=\quad M^{-1}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad N^{-1}_{0\cdot0\cdot1}=0,$$
$$N^{-2}_{n\cdot0\cdot1}=\quad M^{-2}_{n\cdot0\cdot1}, \qquad N^{-2}_{0\cdot0\cdot -}=0,$$

$$
\begin{array}{ll}
188) \quad N^{+3}_{n\cdot 2\cdot 0} = -M^{+3}_{n\cdot 2\cdot 0}, & N^{+3}_{0\cdot 2\cdot 0} = -M^{+3}_{0\cdot 2\cdot 0}, \\
N^{+1}_{n\cdot 2\cdot 0} = -\tfrac{1}{2}(Y_{n\cdot 2\cdot 0} - Y^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0}) + \tfrac{1}{2}(Z_{n\cdot 2\cdot 0} + Z^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0}), & N^{+1}_{0\cdot 2\cdot 0} = \quad M^{+1}_{0\cdot 2\cdot 0}, \\
N^{-1}_{n\cdot 2\cdot 0} = \quad \tfrac{1}{2}(Y_{n\cdot 2\cdot 0} - Y^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0}) + \tfrac{1}{2}(Z_{n\cdot 2\cdot 0} + Z^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0}), & N^{-1}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0, \\
N^{-3}_{n\cdot 2\cdot 0} = \quad M^{-3}_{n\cdot 2\cdot 0}, & N^{-3}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0, \\
N^{+3}_{n\cdot 1\cdot 1} = -M^{+3}_{n\cdot 1\cdot 1}, & N^{+3}_{0\cdot 1\cdot 1} = -M^{+3}_{0\cdot 1\cdot 1}, \\
N^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} = -M^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1}, & N^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
N^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(Y^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} - Y^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1}) + \tfrac{1}{2}(Z^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} + Z^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1}), & N^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(Y^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} - Y^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}) + \tfrac{1}{2}(Z^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} - Z^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}), \\
N^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(Y^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} - Y^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1}) + \tfrac{1}{2}(Z^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} + Z^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1}), & N^{-1}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
N^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} = \quad M^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1}, & N^{-2}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
N^{-3}_{n\cdot 1\cdot 1} = \quad M^{-3}_{n\cdot 1\cdot 1}, & N^{-3}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
N^{+3}_{n\cdot 0\cdot 2} = -M^{+3}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{+3}_{0\cdot 0\cdot 2} = -M^{+3}_{0\cdot 0\cdot 2}, \\
N^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2} = \quad M^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{+2}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0, \\
N^{+1}_{n\cdot 0\cdot 2} = -M^{+1}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{+1}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0, \\
N^{-1}_{n\cdot 0\cdot 2} = \quad M^{-1}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{-1}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0, \\
N^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2} = -M^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{-2}_{0\cdot 0\cdot 2} = -M^{-2}_{0\cdot 0\cdot 2}, \\
N^{-3}_{n\cdot 0\cdot 2} = \quad M^{-3}_{n\cdot 0\cdot 2}, & N^{-3}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0.
\end{array}
$$

11. In gleicher Weise wird:

$$
189) \quad \delta L = \Sigma L_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw \begin{array}{l} + \Sigma L^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0}\, \eta \sin(nw + \mathrm{v}) \\ + \Sigma L^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0}\, \eta \sin(nw - \mathrm{v}) \end{array} + \text{u. s. w.}
$$

$$
- X_2 + 2\varsigma\varkappa \sin(v - \omega) - \tfrac{3}{4}\varsigma\varkappa^2 \sin 2(v - \omega) - \tfrac{3}{4}\varsigma\varkappa\varkappa_1 \sin(2v - \omega - \omega_1).
$$

$$
\begin{array}{ll}
190) \quad L_{n\cdot 0\cdot 0} = -2Z_{n\cdot 0\cdot 0} - W_{n\cdot 0\cdot 0}, & L_{0\cdot 0\cdot 0} = 0, \\
L^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0} = -2Z^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0} - W^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{2}M^{-1}_{n\cdot 0\cdot 0}, & L^{+1}_{0\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{3}{2}b_0, \\
L^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0} = -2Z^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0} - W^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0} - \tfrac{3}{2}M^{+1}_{n\cdot 0\cdot 0}, & L^{-1}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0, \\
L^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1} = -2Z^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1} - W^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} = -S^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1}, \\
L^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1} = -2Z^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1} - W^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{-1}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0, \\
L_{n\cdot 2\cdot 0} = -2Z_{n\cdot 2\cdot 0} - W_{n\cdot 2\cdot 0} - \tfrac{3}{2}M^{+2}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{2}M^{-2}_{n\cdot 1\cdot 0}, & L_{0\cdot 2\cdot 0} = 0, \\
L^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} = -2Z^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} - W^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} + \tfrac{3}{4}(Y^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0} + Z^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0}) - M^{-1}_{n\cdot 0\cdot 0}, & L^{+2}_{0\cdot 2\cdot 0} = -4R^{+2}_{0\cdot 2\cdot 0} - W^{+2}_{0\cdot 2\cdot 0} - 3b_0, \\
L^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} = -2Z^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} - W^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} - \tfrac{3}{4}(Y^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0} - Z^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0}) + M^{+1}_{n\cdot 0\cdot 0}, & L^{-2}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0, \\
L^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} - W^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{3}{2}M^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} - W^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{3}{2}M^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1}, \\
L^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} - W^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{3}{2}M^{-2}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{3}{2}M^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} = \tfrac{1}{2}S^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1}, \\
L^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} - W^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{3}{2}M^{+2}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{-1}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
L^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} = -2Z^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} - W^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{3}{2}M^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1}, & L^{-2}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0, \\
L_{n\cdot 0\cdot 2} = -2Z_{n\cdot 0\cdot 2} - W_{n\cdot 0\cdot 2}, & L_{0\cdot 0\cdot 2} = 0, \\
L^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2} = -2Z^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2} - W^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2}, & L^{+2}_{0\cdot 0\cdot 2} = -2Z^{+2}_{0\cdot 0\cdot 2} - W^{+2}_{0\cdot 0\cdot 2}, \\
L^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2} = -2Z^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2} - W^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2}, & L^{-2}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0.
\end{array}
$$

Die Größe $\frac{\delta a}{a}$ brauchen wir nicht ausdrücklich abzuleiten, da sie sich aus der Relation 169) leicht ergibt.

12. Die vorstehenden Ausdrücke 181) bis 190) gelten zunächst für gewöhnliche Planeten. Die Modifikationen, welche für charakteristische Planeten eintreten, liegen auf der Hand, so daß wir sie nicht besonders hervorzuheben brauchen. Vor allem wird man statt der charakteristischen Koeffizienten $R^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0}\, R^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1}$ u. s. w. die entsprechenden β_1, β_2 u. s. w. zu setzen haben, und überhaupt auf die Ausdrücke 38) bis 44) des dritten Teils Rücksicht nehmen.

13. Ich will aber bemerken, daß ich die Berechnung der Elementenstörungen auf dem Wege über die Gyldénschen Koordinaten nicht als die zweckmäßigste empfehlen möchte; denn bei den auszuführenden Transformationen gehen manche kleinen Glieder verloren — wenn man nicht sehr weit in ihrer Berücksichtigung gehen will —, die in ihrer Gesamtheit unsere Genauigkeitsgrenze überschreiten können und andererseits heben sich manche Glieder gegenseitig auf. Vor allem aber müssen wir auch die Funktionen ξ_3 und ξ_4 mit der doppelten Genauigkeit berechnen, da ein Fehler in diesen eben so stark in e und $e\delta\pi$ und sodann mit doppeltem Betrage in die Mittelpunktsgleichung, also auch in die wahre Länge v eingeht. Diese genauere Berechnung von ξ_3 und ξ_4 macht allerdings keine Schwierigkeiten und bei den nun folgenden numerischen Werten für Aegina haben wir auch darauf Rücksicht genommen; indessen reichen unsere Tafeln im dritten Teile hierfür nicht aus. Es ergab sich:

$$x_1 = -2S \text{ (siehe S. 62)}, \tag{191}$$

$$\begin{array}{llll}
192) \quad \xi_3 = & -(5{,}897)\cos \mathrm{v} & -(6{,}479)\,\eta\cos 2w & -(7{,}108)\,\eta^2\cos(3w-3\mathrm{v}) \\
& +(5{,}571)\cos(2w+\mathrm{v}) & -(6{,}251)\,\eta\cos 3w & -(7{,}455)\,\eta^2\cos(4w-3\mathrm{v}) \\
& +(5{,}282)\cos(3w+\mathrm{v}) & & +(7{,}572)\,\eta^2\cos(5w-3\mathrm{v}) \\
& -(6{,}303)\cos(w-\mathrm{v}) & +(7{,}052)\,\eta\cos(2w-2\mathrm{v}) & +(7{,}515)\,\eta\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +(7{,}019)\cos(2w-\mathrm{v}) & +(8{,}081)\,\eta\cos(3w-2\mathrm{v}) & +(7{,}970)\,\eta\eta'\cos(4w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +(6{,}308)\cos(3w-\mathrm{v}) & -(6{,}899)\,\eta\cos(4w-2\mathrm{v}) & -(8{,}150)\,\eta\eta'\cos(5w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +(5{,}843)\cos(4w-\mathrm{v}) & -(6{,}406)\,\eta\cos(5w-2\mathrm{v}) & -(7{,}860)\,\eta'^2\cos(4w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& +(5{,}442)\cos(5w-\mathrm{v}) & -(6{,}519)\,\eta'\cos(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +(8{,}128)\,\eta'^2\cos(5w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& & -(8{,}327)\,\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & \\
& & +(7{,}223)\,\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & \\
& & +(6{,}776)\,\eta'\cos(5w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1), &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
193) \quad \xi_4 = & (5{,}897)\sin \mathrm{v} & -(6{,}464)\,\eta\sin w & -(7{,}108)\,\eta^2\sin(3w-3\mathrm{v}) \\
& -(5{,}571)\sin(2w+\mathrm{v}) & +(7{,}052)\,\eta\sin(2w-2\mathrm{v}) & -(7{,}455)\,\eta^2\sin(4w-3\mathrm{v}) \\
& -(5{,}282)\sin(3w+\mathrm{v}) & +(8{,}081)\,\eta\sin(3w-2\mathrm{v}) & +(7{,}572)\,\eta^2\sin(5w-3\mathrm{v}) \\
& -(6{,}303)\sin(w-\mathrm{v}) & -(6{,}899)\,\eta\sin(4w-2\mathrm{v}) & +(7{,}515)\,\eta\eta'\sin(3w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)
\end{array}$$

$$+(7{,}019)\sin(2w-\mathrm{v})\quad -(6{,}406)\,\eta\sin(5w-2\mathrm{v})\quad +(7{,}970)\,\eta\eta'\sin(4w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+(6{,}308)\sin(3w-\mathrm{v})\quad -(6{,}519)\,\eta'\sin(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\quad -(8{,}150)\,\eta\eta'\sin(5w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+(5{,}843)\sin(4w-\mathrm{v})\quad -(8{,}327)\,\eta'\sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\quad -(7{,}860)\,\eta'^2\sin(4w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)$$
$$+(5{,}442)\sin(5w-\mathrm{v})\quad +(7{,}223)\,\eta'\sin(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\quad +(8{,}128)\,\eta'^2\sin(5w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)$$
$$+(6{,}776)\,\eta'\sin(5w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1),$$

194) $$\delta L = -(6{,}663)\sin w\quad +(6{,}626)\,\eta\sin(w+\mathrm{v})\quad +(7{,}235)\,\eta'\sin(w-\mathrm{v}_1)$$
$$-(6{,}844)\sin 2w\quad +(6{,}806)\,\eta\sin(2w+\mathrm{v})\quad -(7{,}683)\,\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1)$$
$$-(6{,}377)\sin 3w\quad -(7{,}214)\,\eta\sin(w-\mathrm{v})\quad -(7{,}627)\,\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)$$
$$-(5{,}964)\sin 4w\quad +(8{,}149)\,\eta\sin(2w-\mathrm{v})\quad -(7{,}216)\,\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1)$$
$$-(5{,}581)\sin 5w\quad +(7{,}310)\,\eta\sin(3w-\mathrm{v})\quad -(6{,}877)\,\eta'\sin(5w-\mathrm{v}_1)$$
$$+(6{,}860)\,\eta\sin(4w-\mathrm{v})$$
$$+(6{,}486)\,\eta\sin(5w-\mathrm{v})\quad +(6{,}800)\,\varkappa\sin(v-\varpi)$$

$$-(7{,}461)\,\eta^2\sin 2w\quad +(0{,}0261)\,\eta\eta'\sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+(7{,}777)\,\eta^2\sin(2w-2\mathrm{v})\quad +(8{,}397)\,\eta\eta'\sin(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$-(9{,}4577)\,\eta^2\sin(3w-2\mathrm{v})\quad +(7{,}882)\,\eta\eta'\sin(5w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\quad -(7{,}753)\,\varkappa^2\sin(3w-2v+2\varpi)$$
$$-(7{,}832)\,\eta^2\sin(4w-2\mathrm{v})\quad -(9{,}232)\,\eta'^2\sin(3w-2\mathrm{v}_1)\quad +(7{,}809)\,\varkappa\varkappa'\sin(3w-2v+\varpi+\varpi_1)$$
$$-(8{,}361)\,\eta'^2\sin(4w-2\mathrm{v}_1)\quad -(8{,}596)\sin^2 j\sin(3w-2\mathfrak{v})$$
$$+(8{,}897)\sin j\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1),$$

195) $$\frac{\delta a}{a} = x_1 + 2\eta\xi_2.$$

14. Es wird sich offenbar ereignen können, daß durch die so gefundenen oskulierenden Elemente die Beobachtungen weniger gut dargestellt werden als bei Benutzung der Gyldénschen Koordinaten, da ja auch die konstanten Elemente mit Rücksicht auf die letzteren durch Ausgleichung (Kapitel VI—VII) bestimmt sind. Wenn man indessen die Ausgleichung der Beobachtungen an der Hand der Ausdrücke für die Störungen der oskulierenden Elemente vornimmt, so werden sie voraussichtlich ebensogut dargestellt werden wie oben.

Die Transformation auf die oskulierenden Elemente zeigt aber auch, wie viel die Anwendung der Gyldénschen Koordinaten gegenüber jenen an Einfachheit und Eleganz leistet. Gewiß fehlen in δL einige große Glieder (z. B. die mit den Argumenten $3w$ und $3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$), welche in W vorkommen, aber die Größe der Glieder nimmt mit den Vielfachen von w in δL viel schwächer ab, als in W. Es liegt das hauptsächlich daran, daß die Glieder des Ausdrucks von $\frac{dR}{dv}$ viel schwächer abnehmen als die in R und W. Ein Blick auf die Glieder nullten Grades zeigt dies sehr deutlich und man kann auch den Beweis hierfür analytisch erbringen. Hätten doch unsere Tafeln des dritten Teiles einer merklichen Erweiterung bedurft, um $\frac{dR}{dv}$ innerhalb unserer Genauigkeits-

grenze darzustellen und dazu geht diese Größe noch mit ihrem doppelten Betrage in δL ein. Es bedarf also die Darstellung der Bewegung eines Planeten durch seine oskulierenden Elemente einer weitgehenderen Berücksichtigung von Störungsgliedern, als die durch die Gyldénschen Koordinaten. Wir nehmen gern Gelegenheit, dies hier ausdrücklich zu sagen, da die Zweckmäßigkeit dieser Koordinaten, freilich ohne jeden Beweis, mehrfach bestritten worden ist.

Will man auf möglichst zweckmäßige Art die Störungen der elliptischen Elemente herleiten, so wird man analog der klassischen Störungstheorie ihre Differentialgleichungen, aber mit der Länge v als unabhängiger Variabler, aufstellen und die Störungsfunktion nach der Gyldénschen Methode entwickeln. Es wären dann analoge Integrationsmethoden anzuwenden, wie in unserem I. und II. Teil. Auf die kanonische Form der Differentialgleichungen wird man jedenfalls verzichten müssen, wenn man tiefer in die Einzelheiten der Entwicklungen eindringen will.

15. Wir wollen nun in den Ausdrücken 192) bis 194) wieder die Zeit, d. h. die Argumente ψ, φ, φ_1 einführen und geben direkt das Resultat auch dieser Transformation an (vgl. Kap. I):

$$196) \qquad x_1 = -2S,$$

$$
\begin{aligned}
197) \quad \xi_3 = & -(5{,}897)\cos\varphi + (5{,}571)\cos(2\psi+\varphi) + (5{,}282)\cos(3\psi+\varphi) - (6{,}303)\cos(\psi-\varphi) \\
& + (7{,}019)\cos(2\psi-\varphi) + (6{,}308)\cos(3\psi-\varphi) + (5{,}843)\cos(4\psi-\varphi) + (5{,}442)\cos(5\psi-\varphi) \\
& + (6{,}911)\,\eta\cos(2\psi-2\varphi) + (8{,}074)\,\eta\cos(3\psi-2\varphi) - (6{,}899)\,\eta\cos(4\psi-2\varphi) - (6{,}406)\,\eta\cos(5\psi-2\varphi) \\
& - (6{,}519)\,\eta'\cos(2\psi-\varphi-\varphi_1) - (8{,}327)\,\eta'\cos(3\psi-\varphi-\varphi_1) + (7{,}223)\,\eta'\cos(4\psi-\varphi-\varphi_1) \\
& + (6{,}776)\,\eta'\cos(5\psi-\varphi-\varphi_1) - (7{,}455)\,\eta^2\cos(4\psi-3\varphi) + (7{,}572)\,\eta^2\cos(5\psi-3\varphi) \\
& + (7{,}970)\,\eta\eta'\cos(4\psi-2\varphi-\varphi_1) - (8{,}150)\,\eta\eta'\cos(5\psi-2\varphi-\varphi_1) \\
& - (7{,}860)\,\eta'^2\cos(4\psi-\varphi-2\varphi_1) + (8{,}128)\,\eta'^2\cos(5\psi-\varphi-2\varphi_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
198) \quad \xi_4 = & (5{,}897)\sin\varphi - (5{,}571)\sin(2\psi+\varphi) - (5{,}282)\sin(3\psi+\varphi) - (6{,}303)\sin(\psi-\varphi) \\
& + (7{,}019)\sin(2\psi-\varphi) + (6{,}308)\sin(3\psi-\varphi) + (5{,}843)\sin(4\psi-\varphi) + (5{,}442)\sin(5\psi-\varphi) \\
& - (6{,}464)\,\eta\sin\psi + (6{,}335)\,\eta\sin 2\psi + (6{,}257)\,\eta\sin 3\psi \\
& + (6{,}911)\,\eta\sin(2\psi-2\varphi) + (8{,}074)\,\eta\sin(3\psi-2\varphi) + (6{,}899)\,\eta\sin(4\psi-2\varphi) - (6{,}406)\,\eta\sin(5\psi-2\varphi) \\
& - (6{,}519)\,\eta'\sin(2\psi-\varphi-\varphi_1) - (8{,}327)\,\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) + (7{,}223)\,\eta'\sin(4\psi-\varphi-\varphi_1) \\
& + (6{,}776)\,\eta'\sin(5\psi-\varphi-\varphi_1), - (7{,}455)\,\eta^2\sin(4\psi-3\varphi) + (7{,}572)\,\eta^2\sin(5\psi-3\varphi) \\
& + (7{,}970)\,\eta\eta'\sin(4\psi-2\varphi-\varphi_1) - (8{,}150)\,\eta\eta'\sin(5\psi-2\varphi-\varphi_1) \\
& - (7{,}860)\,\eta'^2\sin(4\psi-\varphi-2\varphi_1) + (8{,}128)\,\eta'^2\sin(5\psi-\varphi-2\varphi_1)
\end{aligned}
$$

199) $\delta L = -(6{,}663)\sin\psi \quad -(7{,}127)\eta\sin(\psi-\varphi) \quad +(7{,}235)\eta'\sin(\psi-\varphi_1) \quad +(6{,}800)\varkappa\sin(\varphi+\Pi-\varrho L-\Gamma)$
$-(6{,}844)\sin 2\psi \quad +(8{,}176)\eta\sin(2\psi-\varphi) \quad -(7{,}683)\eta'\sin(2\psi-\varphi_1)$
$-(6{,}377)\sin 3\psi \quad +(7{,}399)\eta\sin(3\psi-\varphi) \quad -(7{,}627)\eta'\sin(3\psi-\varphi_1)$
$-(5{,}964)\sin 4\psi \quad +(6{,}984)\eta\sin(4\psi-\varphi) \quad -(7{,}216)\eta'\sin(4\psi-\varphi_1)$
$-(5{,}581)\sin 5\psi \quad +(6{,}486)\eta\sin(5\psi-\varphi) \quad -(6{,}877)\eta'\sin(5\psi-\varphi_1)$

$-(9{,}4606)\eta^2\sin(3\psi-2\varphi) \quad +(0{,}0277)\eta\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) \quad -(7{,}753)\varkappa^2\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+2\varrho L+2\Gamma)$
$-(7{,}832)\eta^2\sin(4\psi-2\varphi) \quad +(8{,}397)\eta\eta'\sin(4\psi-\varphi-\varphi_1) \quad +(7{,}809)\varkappa\varkappa'\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+\varrho L+\Gamma+\Gamma_1)$
$+(7{,}882)\eta\eta'\sin(5\psi-\varphi-\varphi_1)$
$-(9{,}232)\eta'^2\sin(3\psi-2\varphi_1) \quad -(8{,}596)\sin^2 j\sin(3\psi-2\chi)$
$-(8{,}361)\eta'^2\sin(4\psi-2\varphi_1) \quad +(8{,}897)\sin j\sin j'\sin(3\psi-\chi-\chi_1)$

200) $\frac{\delta a}{a} = -(6{,}033) \quad +(6{,}674)\eta\cos(2\psi+\varphi) \quad +(7{,}184)\eta'\cos(3\psi-\varphi_1) \quad -(8{,}109)\eta^2\cos(3\psi-2\varphi)$
$+(5{,}907)\cos\psi \quad -(7{,}322)\eta\cos(2\psi-\varphi) \quad +(6{,}904)\eta'\cos(4\psi-\varphi_1) \quad +(8{,}636)\eta\eta'\cos(3\psi-\varphi-\varphi_1)$
$+(6{,}486)\cos 2\psi \quad -(6{,}911)\eta\cos(3\psi-\varphi)$
$+(6{,}107)\cos 3\psi \quad -(6{,}439)\eta\cos(4\psi-\varphi)$
$+(5{,}747)\cos 4\psi,$

wo die Bedeutung der Argumente wiederholt werden mag, nämlich:

201) $\psi = (1-\mu)L-B, \quad \varphi = L-\Pi, \quad \chi = L-\sigma, \quad B = \Lambda'-\mu\Lambda,$
$\varphi_1 = L-\Pi_1, \quad \chi_1 = L-\sigma_1,$

oder

$\psi = \tfrac{2}{3}L-f, \quad \varphi = L-u, \quad \chi = L-\mathfrak{u},$
$\varphi_1 = L-u_1, \quad \chi_1 = L-\mathfrak{u}_1,$

202) $f = -\frac{\delta}{3}L+B, \quad u = \Pi, \quad \mathfrak{u} = \sigma,$
$u = \Pi_1, \quad \mathfrak{u}_1 = \sigma_1.$

16. Zur Herstellung von Tafeln transformieren wir auch diese Ausdrücke wieder, wie Kap. II und setzen

$$\xi_3 = \Sigma A_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma B_n\cos\frac{n}{3}L,$$

$$\xi_4 = \Sigma C_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma D_n\cos\frac{n}{3}L,$$

203) $$\delta L = \Sigma E_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma F_n\cos\frac{n}{3}L,$$

$$x_1 = \Sigma K_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma L_n\cos\frac{n}{3}L,$$

$$\frac{\delta a}{a} = \Sigma M_n \sin\frac{n}{3}L + \Sigma N_n\cos\frac{n}{3}L,$$

$$204)\quad B_0 = (8,074)\,\eta\cos(3f-2u) - (8,327)\,\eta'\cos(3f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}A_1\\B_1\end{matrix}\right\} = \pm(6,303)\,\frac{\sin}{\cos}(f-u) + (7,019)\,\frac{\sin}{\cos}(2f-u) \pm (7,455)\,\eta^2\,\frac{\sin}{\cos}(4f-3u)$$
$$\mp(7,970)\,\eta\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(4f-2u-u_1) \pm (7,860)\,\eta'^2\,\frac{\sin}{\cos}(4f-u-2u_1)$$
$$+(7,572)\,\eta^2\,\frac{\sin}{\cos}(5f-3u) - (8,150)\,\eta\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(5f-2u-u_1)$$
$$+(8,128)\,\eta'^2\,\frac{\sin}{\cos}(5f-u-2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right\} = \mp(6,911)\,\eta\,\frac{\sin}{\cos}(2f-2u) \pm (6,519)\,\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(2f-u-u_1)$$
$$-(6,899)\,\eta\,\frac{\sin}{\cos}(4f-2u) + (7,223)\,\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(4f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}A_3\\B_3\end{matrix}\right\} = -(5,897)\,\frac{\sin}{\cos}u + (6,308)\,\frac{\sin}{\cos}(3f-u),$$

$$\left.\begin{matrix}A_4\\B_4\end{matrix}\right\} = -(6,406)\,\eta\,\frac{\sin}{\cos}(5f-2u) + (6,776)\,\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(5f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}A_5\\B_5\end{matrix}\right\} = (5,843)\,\frac{\sin}{\cos}(4f-u),$$

$$\left.\begin{matrix}A_7\\B_7\end{matrix}\right\} = (5,571)\,\frac{\sin}{\cos}(2f+u) + (5,442)\,\frac{\sin}{\cos}(5f-u),$$

$$\left.\begin{matrix}A_9\\B_9\end{matrix}\right\} = (5,282)\,\frac{\sin}{\cos}(3f+u).$$

$$205)\quad D_0 = -(8,074)\,\eta\sin(3f-2u) + (8,327)\,\eta'\sin(3f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C_1\\D_1\end{matrix}\right\} = (6,303)\,\frac{\cos}{\sin}(f-u) \pm (7,019)\,\frac{\cos}{\sin}(2f-u) + (7,455)\,\eta^2\,\frac{\cos}{\sin}(4f-3u)$$
$$-(7,970)\,\eta\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(4f-2u-u_1) + (7,860)\,\eta'^2\,\frac{\cos}{\sin}(4f-u-2u_1)$$
$$\pm(7,572)\,\eta^2\,\frac{\cos}{\sin}(5f-3u) \mp (8,150)\,\eta\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(5f-2u-u_1)$$
$$\pm(8,128)\,\eta'^2\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u-2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right\} = \mp(6,464)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}f - (6,911)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(2f-2u) + (6,519)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(2f-u-u_1)$$
$$\mp(6,899)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(4f-2u) \pm (7,223)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(4f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}C_3\\D_3\end{matrix}\right\} = \pm(5,897)\,\frac{\cos}{\sin}u \pm (6,308)\,\frac{\cos}{\sin}(3f-u),$$

$$205)\quad \left.\begin{matrix} C_4 \\ D_4 \end{matrix}\right\} = \pm(6{,}335)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}\,2f \mp (6{,}406)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(5f-2u) \pm (6{,}776)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u-u_1),$$

$$\begin{matrix} C_5 = B_5, \\ D_5 = -A_5, \end{matrix}\qquad \left.\begin{matrix} C_6 \\ D_6 \end{matrix}\right\} = \pm(6{,}257)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}\,3f.$$

$$\left.\begin{matrix} C_7 \\ D_7 \end{matrix}\right\} = \mp(5{,}571)\,\frac{\cos}{\sin}(3f+u) \pm (5{,}442)\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u),\qquad \begin{matrix} C_9 = -B_9, \\ D_9 = A_9. \end{matrix}$$

$$206)\quad F_0 = (9{,}4606)\,\eta^2 \sin(3f-2u) - (0{,}0277)\,\eta\eta' \sin(3f-u-u_1) + (9{,}232)\,\eta'^2 \sin(3f-2u_1)$$
$$+ (7{,}753)\,\varkappa^2 \sin(3f-2\varrho L-2\Gamma) - (7{,}809)\,\varkappa\varkappa' \sin(3f-\varrho L-\Gamma-\Gamma_1)$$
$$+ (8{,}596)\sin^2 j \sin(3f-2\mathfrak{u}) - (8{,}897)\sin j \sin j' \sin(3f-\mathfrak{u}-\mathfrak{u}_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_1 \\ F_1 \end{matrix}\right\} = (7{,}127)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(f-u) \pm (8{,}176)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(2f-u) - (7{,}235)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(f-u_1) \mp (7{,}683)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(2f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_2 \\ F_2 \end{matrix}\right\} = \mp(6{,}663)\,\frac{\cos}{\sin}\,f \mp (7{,}832)\,\eta^2\,\frac{\cos}{\sin}(4f-2u) \pm (8{,}397)\,\eta\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(4f-u-u_1) \mp (8{,}361)\,\eta'^2\,\frac{\cos}{\sin}(4f-2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_3 \\ F_3 \end{matrix}\right\} = \pm(7{,}399)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(3f-u) \mp (7{,}627)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(3f-u_1) \pm (6{,}800)\,\varkappa\,\frac{\cos}{\sin}(\varrho L+\Gamma),$$

$$\left.\begin{matrix} E_4 \\ F_4 \end{matrix}\right\} = \mp(6{,}844)\,\frac{\cos}{\sin}\,2f \pm (7{,}882)\,\eta\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_5 \\ F_5 \end{matrix}\right\} = \pm(6{,}984)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(4f-u) \mp (7{,}216)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(4f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_6 \\ F_6 \end{matrix}\right\} = \mp(6{,}377)\,\frac{\cos}{\sin}\,3f,$$

$$\left.\begin{matrix} E_7 \\ F_7 \end{matrix}\right\} = \pm(6{,}486)\,\eta\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u) \mp (6{,}877)\,\eta'\,\frac{\cos}{\sin}(5f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} E_8 \\ F_8 \end{matrix}\right\} = \mp(5{,}964)\,\frac{\cos}{\sin}\,4f,\qquad \left.\begin{matrix} E_{10} \\ F_{10} \end{matrix}\right\} = \mp(5{,}581)\,\frac{\cos}{\sin}\,5f.$$

$$207)\quad L_0 = -(6{,}033) - (8{,}563)\,\eta^2 \cos(3f-2u) + (8{,}934)\,\eta\eta' \cos(3f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} K_1 \\ L_1 \end{matrix}\right\} = \mp(6{,}657)\,\eta\,\frac{\sin}{\cos}(f-u) - (7{,}622)\,\eta\,\frac{\sin}{\cos}(2f-u),$$

$$\left.\begin{matrix} K_2 \\ L_2 \end{matrix}\right\} = (5{,}907)\,\frac{\sin}{\cos}\,f \pm (7{,}443)\,\eta^2\,\frac{\sin}{\cos}(2f-2u) + (7{,}459)\,\eta^2\,\frac{\sin}{\cos}(4f-2u) - (7{,}944)\,\eta\eta'\,\frac{\sin}{\cos}(4f-u-u_1),$$

$$207)\quad \begin{matrix} K_3 \\ L_3 \end{matrix}\Big\} = -(7{,}087)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u) + (7{,}184)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u_1),$$

$$\begin{matrix} K_4 \\ L_4 \end{matrix}\Big\} = (6{,}486) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2f,$$

$$\begin{matrix} K_5 \\ L_5 \end{matrix}\Big\} = -(6{,}617)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-u) + (6{,}904)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-u_1),$$

$$\begin{matrix} K_6 \\ L_6 \end{matrix}\Big\} = (6{,}107) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f, \qquad \begin{matrix} K_7 \\ L_7 \end{matrix}\Big\} = (6{,}599)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f+u),$$

$$\begin{matrix} K_8 \\ L_8 \end{matrix}\Big\} = (5{,}747) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 4f.$$

$$208)\quad N_0 = -(6{,}033) - (8{,}109)\,\eta^2 \cos(3f-2u) + (8{,}636)\,\eta\eta' \cos(3f-u-u_1),$$

$$\begin{matrix} M_1 \\ N_1 \end{matrix}\Big\} = -(7{,}322)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f-u), \qquad \begin{matrix} M_2 \\ N_2 \end{matrix}\Big\} = (5{,}907) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} f,$$

$$\begin{matrix} M_3 \\ N_3 \end{matrix}\Big\} = -(6{,}911)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u) + (7{,}184)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3f-u_1),$$

$$\begin{matrix} M_5 \\ N_5 \end{matrix}\Big\} = -(6{,}439)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-u) + (6{,}904)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-u_1),$$

$$\begin{matrix} M_7 \\ N_7 \end{matrix}\Big\} = (6{,}674)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f+u),$$

$$M_4 = K_4, \qquad M_6 = K_6, \qquad M_8 = K_8,$$
$$N_4 = L_4, \qquad N_6 = L_6, \qquad N_8 = L_8.$$

Zum Zwecke der Tabulierung zerlegen wir die Größen A_n bis N_n wie früher:

$$209)\quad B_0 = a_{0\cdot 3} \cos 3f + b_{0\cdot 3} \sin 3f,$$

$$\begin{matrix} A_1 \\ B_1 \end{matrix}\Big\} = \mp a_{1\cdot 1} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} f + b_{1\cdot 1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} f + a_{1\cdot 2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2f \mp b_{1\cdot 2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2f \mp a_{1\cdot 4} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 4f + b_{1\cdot 4} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 4f$$
$$+ a_{1\cdot 5} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 5f \mp b_{1\cdot 5} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 5f,$$

$$\begin{matrix} A_2 \\ B_2 \end{matrix}\Big\} = \mp a_{2\cdot 2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2f + b_{2\cdot 2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2f + a_{2\cdot 4} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 4f \mp b_{2\cdot 4} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 4f,$$

$$\begin{matrix} A_3 \\ B_3 \end{matrix}\Big\} = \Big\{ \begin{matrix} b_{3\cdot 0} \\ a_{3\cdot 0} \end{matrix} + a_{3\cdot 3} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f \mp b_{3\cdot 3} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3f, \qquad \begin{matrix} A_4 \\ B_4 \end{matrix}\Big\} = a_{4\cdot 5} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 5f \mp b_{4\cdot 5} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 5f,$$

$$\begin{matrix} A_5 \\ B_5 \end{matrix}\Big\} = a_{5\cdot 4} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 4f \mp b_{5\cdot 4} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 4f,$$

$$\begin{matrix} A_7 \\ B_7 \end{matrix}\Big\} = a_{7\cdot 2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2f \pm b_{7\cdot 2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2f + a_{7\cdot 5} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 5f \mp b_{7\cdot 5} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 5f,$$

$$\begin{matrix} A_9 \\ B_9 \end{matrix}\Big\} = a_{9\cdot 3} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f \pm b_{9\cdot 3} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3f.$$

$$210)\quad D_0 = c_{0.3}\cos 3f - d_{0.3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_1\\D_1\end{matrix}\right\} = \mp c_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} f - d_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} f + c_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f \pm d_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f \mp c_{1.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 4f - d_{1.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f + c_{1.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 5f \pm d_{1.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right\} = \pm d_{2.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} f \mp c_{2.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f - d_{2.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f + c_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 4f \pm d_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_3\\D_3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}+d_{3.0}\\-c_{3.0}\end{matrix}\right. + c_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 3f \pm d_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_4\\D_4\end{matrix}\right\} = \pm d_{4.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f + c_{4.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 5f \pm d_{4.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f,$$

$$\begin{matrix}C_5 = B_5,\\D_5 = -A_5,\end{matrix}\qquad \left.\begin{matrix}C_6\\D_6\end{matrix}\right\} = \pm d_{6.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}C_7\\D_7\end{matrix}\right\} = -c_{7.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f \pm d_{7.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f + c_{7.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 5f \pm d_{7.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f,\qquad \begin{matrix}C_9 = -B\ ,\\D_9 = A_9.\end{matrix}$$

$$211)\quad F_0 = e_{0.3}\cos 3f - f_{0.3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_1\\F_1\end{matrix}\right\} = \mp e_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} f - f_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} f + e_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f \pm f_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_2\\F_2\end{matrix}\right\} = \pm f_{2.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} f + e_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 4f \pm f_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_3\\F_3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}f_{3.0}\\-e_{3.0}\end{matrix}\right. + e_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 3f \pm f_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_4\\F_4\end{matrix}\right\} = \pm f_{4.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f + e_{4.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 5f \pm f_{4.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f,$$

$$\left.\begin{matrix}E\\F_5\end{matrix}\right\} = e_{5.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 4f \pm f_{5.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f,\qquad \left.\begin{matrix}E_6\\F_6\end{matrix}\right\} = \pm f_{6.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_7\\F_7\end{matrix}\right\} = e_{7.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 5f \pm f_{7.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f,\qquad \left.\begin{matrix}E_8\\F_8\end{matrix}\right\} = \pm f_{8.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}E_{10}\\F_{10}\end{matrix}\right\} = \pm f_{10.5}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 5f.$$

$$212)\quad L_0 = k_{0.0} + k_{0.3}\cos 3f + l_{0.3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}K_1\\L_1\end{matrix}\right\} = \mp k_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} f + l_{1.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} f + k_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f \mp l_{1.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f,$$

$$\left.\begin{matrix}K_2\\L_2\end{matrix}\right\} = k_{2.1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} f \mp k_{2.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f + l_{2.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 2f + k_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 4f \mp l_{2.4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 4f,$$

$$\left.\begin{matrix}K_3\\L_3\end{matrix}\right\} = k_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 3f \mp l_{3.3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} 3f,\qquad \left.\begin{matrix}K_4\\L_4\end{matrix}\right\} = k_{4.2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} 2f,$$

$$212)\quad \left.\begin{matrix}K_5\\L_5\end{matrix}\right\} = k_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f \mp l_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f,\qquad \left.\begin{matrix}K_6\\L_6\end{matrix}\right\} = k_{6\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}3f,$$

$$\left.\begin{matrix}K_7\\L_7\end{matrix}\right\} = k_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2f \pm l_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f,\qquad \left.\begin{matrix}K_8\\L_8\end{matrix}\right\} = k_{8\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f,$$

$$213)\quad N_0 = m_{0\cdot0} + m_{0\cdot3}\cos 3f + n_{0\cdot3}\sin 3f,$$

$$\left.\begin{matrix}M_1\\N_1\end{matrix}\right\} = m_{1\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2f \mp n_{1\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f,\qquad \left.\begin{matrix}M_2\\N_2\end{matrix}\right\} = m_{2\cdot1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}f,$$

$$\left.\begin{matrix}M_3\\N_3\end{matrix}\right\} = m_{3\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}3f \mp n_{3\cdot3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3f,\qquad \left.\begin{matrix}M_5\\N_5\end{matrix}\right\} = m_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4f \mp n_{5\cdot4}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4f,$$

$$\left.\begin{matrix}M_7\\N_7\end{matrix}\right\} = m_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2f \pm n_{7\cdot2}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2f,$$

$$M_4 = K_4,\qquad M_6 = K_6,\qquad M_8 = K_8,$$

$$N_4 = L_4,\qquad N_6 = L_6,\qquad N_8 = L_8,$$

wo:

$$214)\quad \left.\begin{matrix}a_{0\cdot3}\\b_{0\cdot3}\end{matrix}\right\} = (8{,}074)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2u - (8{,}327)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}a_{1\cdot1}\\b_{1\cdot1}\end{matrix}\right\} = -(6{,}303)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,\qquad \left.\begin{matrix}a_{1\cdot2}\\b_{1\cdot2}\end{matrix}\right\} = (7{,}019)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,$$

$$\left.\begin{matrix}a_{1\cdot4}\\b_{1\cdot4}\end{matrix}\right\} = -(7{,}455)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3u + (7{,}970)\,\eta\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2u+u_1) - (7{,}860)\,\eta'^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}a_{1\cdot5}\\b_{1\cdot5}\end{matrix}\right\} = (7{,}572)\,\eta^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}3u - (8{,}150)\,\eta\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2u+u_1) + (8{,}128)\,\eta'^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+2u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}a_{2\cdot2}\\b_{2\cdot2}\end{matrix}\right\} = (6{,}911)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2u - (6{,}519)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}a_{2\cdot4}\\b_{2\cdot4}\end{matrix}\right\} = -(6{,}899)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2u + (7{,}223)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}a_{3\cdot0}\\b_{3\cdot0}\end{matrix}\right\} = -(5{,}897)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,\qquad \left.\begin{matrix}a_{3\cdot3}\\b_{3\cdot3}\end{matrix}\right\} = (6{,}308)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,$$

$$\left.\begin{matrix}a_{4\cdot5}\\b_{4\cdot5}\end{matrix}\right\} = -(6{,}406)\,\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2u + (6{,}776)\,\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(u+u_1),\qquad \left.\begin{matrix}a_{5\cdot4}\\b_{5\cdot4}\end{matrix}\right\} = (5{,}843)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,$$

$$\left.\begin{matrix}a_{7\cdot2}\\b_{7\cdot2}\end{matrix}\right\} = (5{,}571)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,\qquad \left.\begin{matrix}a_{7\cdot5}\\b_{7\cdot5}\end{matrix}\right\} = (5{,}442)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u,\qquad \left.\begin{matrix}a_{8\cdot3}\\b_{8\cdot3}\end{matrix}\right\} = (5{,}282)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}u.$$

$$215)\quad \begin{matrix}
c_{0\cdot3} = b_{0\cdot3}, & c_{1\cdot1} = b_{1\cdot1}, & c_{1\cdot2} = b_{1\cdot2}, & c_{1\cdot4} = b_{1\cdot4}, & c_{1\cdot5} = b_{1\cdot5},\\
d_{0\cdot3} = a_{0\cdot3}, & d_{1\cdot1} = a_{1\cdot1}, & d_{1\cdot2} = a_{1\cdot2}, & d_{1\cdot4} = a_{1\cdot4}, & d_{1\cdot5} = a_{1\cdot5},\\
d_{2\cdot1} = -(6{,}464)\,\eta, & c_{2\cdot2} = b_{2\cdot2}, & c_{2\cdot4} = b_{2\cdot4}, & c_{3\cdot0} = -b_{3\cdot0}, & c_{3\cdot3} = b_{3\cdot3},\\
 & d_{2\cdot2} = a_{2\cdot2}, & d_{2\cdot4} = a_{2\cdot4}, & d_{3\cdot0} = -a_{3\cdot0}, & d_{3\cdot3} = a_{3\cdot3},\\
d_{4\cdot2} = (6{,}335)\,\eta, & c_{4\cdot5} = b_{4\cdot5}, & d_{6\cdot3} = (6{,}257)\,\eta, & c_{7\cdot2} = -b_{7\cdot2}, & c_{7\cdot5} = b_{7\cdot5},\\
 & d_{4\cdot5} = a_{4\cdot5}, & & d_{7\cdot2} = -a_{7\cdot2}, & d_{7\cdot5} = a_{7\cdot5}.
\end{matrix}$$

216) $$\left.\begin{matrix} e_{0\cdot2} \\ f_{0\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(9{,}4606)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u + (0{,}0277)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos} (u+u_1) - (9{,}232)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1$$

$$-(7{,}753)\,\varkappa^2 \frac{\sin}{\cos} (2\varsigma L + 2\Gamma) + (7{,}809)\,\varkappa\varkappa' \frac{\sin}{\cos} (\varsigma L + \Gamma + \Gamma_1)$$

$$-(8{,}596) \sin^2 j \frac{\sin}{\cos} 2u + (8{,}897) \sin j \sin j' \frac{\sin}{\cos} (u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} e_{1\cdot1} \\ f_{1\cdot1} \end{matrix}\right\} = -(7{,}127)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u + (7{,}235)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} e_{1\cdot2} \\ f_{1\cdot2} \end{matrix}\right\} = (8{,}176)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}683)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1, \qquad f_{2\cdot1} = -(6{,}663),$$

$$\left.\begin{matrix} e_{2\cdot4} \\ f_{2\cdot4} \end{matrix}\right\} = -(7{,}832)\,\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2u + (8{,}397)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos} (u+u_1) - (8{,}361)\,\eta'^2 \frac{\sin}{\cos} 2u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} e_{3\cdot0} \\ f_{3\cdot0} \end{matrix}\right\} = (6{,}800)\,\varkappa \frac{\sin}{\cos} (\varsigma L + \Gamma), \qquad \left.\begin{matrix} e_{3\cdot3} \\ f_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = (7{,}399)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}627)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1,$$

$$f_{4\cdot2} = -(6{,}844), \qquad \left.\begin{matrix} e_{4\cdot5} \\ f_{4\cdot5} \end{matrix}\right\} = (7{,}882)\,\eta\eta' \frac{\sin}{\cos} (u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} e_{5\cdot4} \\ f_{5\cdot4} \end{matrix}\right\} = (6{,}984)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (7{,}216)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1, \qquad f_{6\cdot3} = -(6{,}377),$$

$$\left.\begin{matrix} e_{7\cdot5} \\ f_{7\cdot5} \end{matrix}\right\} = (6{,}486)\,\eta \frac{\sin}{\cos} u - (6{,}877)\,\eta' \frac{\sin}{\cos} u_1, \qquad f_{8\cdot4} = -(5{,}964),$$

$$f_{10\cdot5} = -(5{,}581).$$

---

217) $$k_{0\cdot0} = -(6{,}033), \qquad \left.\begin{matrix} k_{0\cdot2} \\ l_{0\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(8{,}563)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u + (8{,}934)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} (u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} k_{1\cdot1} \\ l_{1\cdot1} \end{matrix}\right\} = (6{,}657)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u, \qquad \left.\begin{matrix} k_{1\cdot2} \\ l_{1\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(7{,}622)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u,$$

$$k_{2\cdot1} = (5{,}907), \qquad \left.\begin{matrix} k_{2\cdot2} \\ l_{2\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(7{,}443)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u,$$

$$\left.\begin{matrix} k_{2\cdot4} \\ l_{2\cdot4} \end{matrix}\right\} = (7{,}459)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u - (7{,}944)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} (u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} k_{3\cdot3} \\ l_{3\cdot3} \end{matrix}\right\} = -(7{,}087)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u + (7{,}184)\,\eta' \frac{\cos}{\sin} u_1, \qquad k_{4\cdot2} = (6{,}486),$$

$$\left.\begin{matrix} k_{5\cdot4} \\ l_{5\cdot4} \end{matrix}\right\} = -(6{,}617)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u + (6{,}904)\,\eta' \frac{\cos}{\sin} u_1, \qquad k_{6\cdot3} = (6{,}107),$$

$$\left.\begin{matrix} k_{7\cdot2} \\ l_{7\cdot2} \end{matrix}\right\} = (6{,}599)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u, \qquad k_{8\cdot4} = (5{,}747).$$

---

218) $$m_{0\cdot0} = -(6{,}033), \qquad \left.\begin{matrix} m_{0\cdot2} \\ n_{0\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(8{,}109)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin} 2u + (8{,}636)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} (u+u_1),$$

$$\left.\begin{matrix} m_{1\cdot2} \\ n_{1\cdot2} \end{matrix}\right\} = -(7{,}322)\,\eta \frac{\cos}{\sin} u, \qquad m_{2\cdot1} = (5{,}907),$$

$$\left.\begin{matrix} m_{3·3} \\ n_{3·3} \end{matrix}\right\} = -(6,911)\,\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} u + (7,184)\,\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} u_1,$$

$$\left.\begin{matrix} m_{5·4} \\ n_{5·4} \end{matrix}\right\} = -(6,439)\,\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} u + (6,904)\,\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} u_1, \qquad \left.\begin{matrix} m_{7·2} \\ n_{7·2} \end{matrix}\right\} = (6,674)\,\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} u.$$

17. Die Rechnung ergab für die Zeit 1910—1950 in Einheiten der 5. Dezimale:

	$b_{0·3}$	$a_{1·2}$	$e_{0·3}$	$f_{0·3}$	$f_{1·2}$
1910	−66	+15	+447	+234	0
1930	−67	+15	+449	+231	−1
1950	−68	+14	+451	+229	−1

Die übrigen Koeffizienten ändern sich während der 40 Jahre nicht um eine volle Einheit der 5. Dezimale und sind:

$a_{0·3} = -118$, $a_{1·1} = -3$, $a_{1·2}$ s. oben, $a_{1·4} = -3$, $a_{1·5} = +5$,
$b_{0·3}$ s. oben, $b_{1·1} = -20$, $b_{1·2} = +104$, $b_{1·4} = +2$, $b_{1·5} = -1$,

$a_{2·2} = -8$, $a_{2·4} = +7$, $a_{3·0} = -1$, $a_{3·3} = +3$,
$b_{2·2} = +1$, $b_{2·4} = +6$, $b_{3·0} = -8$, $b_{3·3} = +20$,

$a_{4·5} = +2$, $a_{5·4} = +1$, $a_{7·2} = +1$, $a_{7·5} = 0$, $a_{9·3} = 0$,
$b_{4·5} = +2$, $b_{5·4} = +7$, $b_{7·2} = +4$, $b_{7·5} = +3$, $b_{9·3} = +2$,

---

$d_{2·1} = -3$, $d_{4·2} = +2$, $d_{8·3} = +2$,

$e_{1·1} = -12$, $e_{1·2} = +153$, $f_{2·1} = -46$, $e_{2·4} = +8$,
$f_{1·1} = +6$, $f_{1·2}$ s. oben, $f_{2·4} = +2$,

$e_{3·0} = +6$, $e_{3·3} = +22$, $f_{4·3} = -70$, $e_{4·5} = +4$,
$f_{3·0} = -1$, $f_{3·3} = -16$, $f_{4·5} = 0$,

$e_{5·4} = +8$, $f_{6·3} = -24$, $e_{7·5} = +2$, $f_{8·4} = -9$, $f_{10·5} = -4$,
$f_{5·4} = -6$, $f_{7·5} = -3$,

$m_{0,0} = -11$, $m_{0·3} = +12$, $m_{1·2} = -3$, $m_{2·1} = +8$,
$n_{0·3} = +18$, $n_{1·2} = -22$,

$m_{3·3} = +6$, $m_{5·4} = +3$, $m_{7·2} = +1$,
$n_{3·3} = -7$, $n_{5·4} = -2$, $n_{7·2} = +5$.

Hieraus ergeben sich die Werte der Koeffizienten A_n bis N_n, welche in Tafel 6 gegeben sind. Ein numerisches Beispiel für die Anwendung der Tafeln findet sich im XII. Kapitel.

Elftes Kapitel.

Instantane Elemente.

An der Hand unserer im Vorigen entwickelten Methode kann man die Oerter eines Planeten auf zweierlei Arten berechnen, entweder durch Berechnung der Koordinatenstörungen (der Gyldénschen Koordinaten) oder durch Berechnung der oskulierenden Elemente. Will man eine Ephemeride unter scharfer Berücksichtigung der Störungen berechnen, so bietet die Anwendung der Koordinatenstörungen R und W bereits große Bequemlichkeiten. Kommt es nicht auf große Schärfe an, so wird man vielleicht vorziehen, etwa für die Mitte der Zeit, auf die sich die Ephemeride beziehen soll, oskulierende Elemente zu rechnen. Umständlicher würde es sein, solche für jeden Ephemeridenort abzuleiten; indessen wird man diese, wie die Größen R und W, etwa für drei Orte — Anfang, Mitte und Ende der Ephemeride — sich verschaffen und dann interpolieren können.

1. Wir wollen aber noch eine dritte Methode angeben, indem wir Elemente einführen, welche wir „instantane" nennen wollen und welche zu jeder Zeit den Ort des Planeten, nicht aber auch gleichzeitig, wie die oskulierenden Elemente, dessen Ableitungen darstellen sollen. Es gibt offenbar unendlich viele solcher Systeme; es gilt nur, sie so zu wählen, daß die Rechnung möglichst einfach wird.

Unsere Formeln zur Berechnung des Radiusvektor r und der Länge in der Bahn v lauteten:

$$219)\qquad M = L - \Pi - W, \qquad \varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M, \qquad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos \mathrm{v} + R},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}, \qquad v = \mathrm{v} + \Pi,$$

Statt dessen wollen wir setzen:

$$220)\qquad \bar{M} = \bar{L} - \bar{\pi}, \qquad \bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E} = \bar{M}, \qquad r = \frac{\bar{p}}{1+\bar{e} \cos \bar{\mathrm{v}}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\bar{\mathrm{v}}}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{\bar{E}}{2}, \qquad v = \bar{\mathrm{v}} + \bar{\pi}, \qquad v + \Omega - \Sigma = v_0.$$

Die Größen $\bar{L}$ = der mittleren Länge in der Epoche, $\bar{e}, \bar{\pi}, \bar{p}$ seien die instantanen Elemente. Wir setzen noch

$$221)\qquad \begin{aligned} \bar{L} &= L+\delta L, & \bar{e} &= \eta+\delta e, & \bar{\mathrm{v}} &= \mathrm{v}+\delta \mathrm{v}, \\ \bar{p} &= a(1-\eta^2)+\delta p, & \bar{\pi} &= \Pi+\delta\pi, & \delta\pi &= -\delta \mathrm{v}. \end{aligned}$$

Die mittlere Bewegung n behalten wir für die instantane Ellipse der Bequemlichkeit halber bei, so daß also hier die dem dritten Kepplerschen Gesetze entsprechende Beziehung zwischen der halben großen Axe und der mittleren Bewegung nicht besteht. Man kann allerdings auch $\bar{n}$ entsprechend dieser Beziehung einführen, was nur eine Modifikation von δL und etwas mehr Rechnung erfordern würde. Ich will indessen hier nicht darauf eingehen.

2. Die folgende Wahl der instantanen Elemente gilt speziell für die Planeten vom Hestiatypus und ist besonders vorteilhaft bei den sehr stark kommensurablen Planeten dieses Typus. Man wird aber ohne Schwierigkeit auch die entsprechenden Definitionen für die anderen Typen treffen können.

Wir gehen von der Betrachtung aus, daß die Funktion R einige charakteristische Glieder enthält, deren Perioden nahe gleich der Umlaufszeit des Planeten sind, nämlich nach Teil III, S. 12

$$222)\qquad \text{pars}\, R = \beta_1\eta\cos(3w-\mathrm{v})+\beta_2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+b_8\varkappa\cos(3w-v+\omega)$$

oder nach der Transformation auf die Argumente ψ, φ, φ_1, bei welcher noch ein Glied hinzutritt, siehe Gl. 16)—17);

$$223)\qquad \begin{aligned} \text{pars}\, R = [\beta_1-(2+\delta)R_{3\cdot 0\cdot 0}]\,\eta\cos(3\psi-\varphi)+\beta_2\eta'\cos(3\psi-\varphi_1) \\ +\,b_8\varkappa\cos(3\psi-\varphi+\varsigma L+\Gamma). \end{aligned}$$

Diese Glieder haben also nahezu die gleiche Periode, wie das Hauptglied $\eta\cos\mathrm{v}$ im Nenner des Ausdruckes

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos\mathrm{v}+R}$$

und es ist einleuchtend, daß man gut tun wird, sie in Störungen der Exzentrizität und der Perihellänge umzuwandeln, also zu η und Π zu schlagen, wo sie dann langperiodisch und leicht zu tabulieren sein werden. Das Prinzip, nach dem wir die instantanen Elemente wählen, ist überhaupt das, daß die langsam veränderlichen Glieder als Störungen der Elemente, die übrigen als Störungen der Koordinaten behandelt werden.

3. Wir setzen nun in Analogie mit Gl. 162)

$$224)\qquad \begin{aligned} \bar{e}\cos\delta\pi &= \eta+\bar{\mathfrak{x}}_3, \\ \bar{e}\sin\delta\pi &= -\bar{\mathfrak{x}}_4. \end{aligned}$$

Ueber die Größen $\bar{\mathfrak{x}}_3$ und $\bar{\mathfrak{x}}_4$ werden wir gleich verfügen und zwar nach dem eben Gesagten so, daß sie nur Glieder enthalten, welche als Funktionen der

Zeit (also von ψ, φ, φ_1) langperiodisch sind. Wir setzen — entsprechend den erwähnten Gliedern in R —*)

$$225)\quad \left.\begin{matrix}\overline{\xi}_3\\ \overline{\xi}_4\end{matrix}\right\} = c_1\eta \frac{\cos}{\sin}(3\psi-2\varphi) + c_2\eta' \frac{\cos}{\sin}(3\psi-\varphi-\varphi_1) + c_3\varkappa \frac{\cos}{\sin}(3\psi-2\varphi-\Pi+\varsigma L+\Gamma).$$

Ferner setzen wir ebenfalls analog Gleichung 156):

$$226)\quad \begin{aligned} \overline{e}\cos\overline{\mathrm{v}} &= \eta\cos\mathrm{v}+\overline{\xi}_1, & \overline{\xi}_1 &= \overline{\xi}_3\cos\mathrm{v}-\overline{\xi}_4\sin\mathrm{v}, & \overline{\xi}_3 &= \overline{\xi}_1\cos\mathrm{v}+\overline{\xi}_2\sin\mathrm{v},\\ \overline{e}\sin\overline{\mathrm{v}} &= \eta\sin\mathrm{v}+\overline{\xi}_2, & \overline{\xi}_2 &= \overline{\xi}_3\sin\mathrm{v}+\overline{\xi}_4\cos\mathrm{v}, & \overline{\xi}_4 &= -\overline{\xi}_1\sin\mathrm{v}+\overline{\xi}_2\cos\mathrm{v}.\end{aligned}$$

Hiermit wird also

$$227)\quad \left.\begin{matrix}\overline{\xi}_1\\ \overline{\xi}_2\end{matrix}\right\} = c_1\eta \frac{\cos}{\sin}(3\psi-2\varphi+\mathrm{v}) + c_2\eta' \frac{\cos}{\sin}(3\psi-\varphi-\varphi_1+\mathrm{v}) + c_3\varkappa \frac{\cos}{\sin}(3\psi-2\varphi+\mathrm{v}-\Pi+\varsigma L+\Gamma).$$

Nun zerlegen wir

$$228)\quad R = \xi_1 + \overline{R}$$

und bestimmen $\overline{\xi}_1$ so, daß die oben erwähnten Glieder 222) in $\overline{R}$ nicht vorkommen, d. h. wir setzen

$$229)\quad c_1 = \beta_1 - (2+\delta)R_{3\cdot0\cdot0}, \qquad c_2 = \beta_2, \qquad c_3 = b_3.$$

Wir drücken nun $\overline{\xi}_1$ und $\overline{\xi}_2$ durch die Argumente w, v, v_1 aus, indem wir die entgegengesetzte Transformation ausführen, wie in Kap. I, und erhalten für unser Beispiel, in welchem b_3 verschwindet:

$$230)\quad \left.\begin{matrix}\overline{\xi}_1\\ \overline{\xi}_2\end{matrix}\right\} = (8{,}110)\,\eta \frac{\cos}{\sin}(3w-\mathrm{v}) - (8{,}354)\,\eta' \frac{\cos}{\sin}(3w-\mathrm{v}_1) + (6{,}845)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}3w - (7{,}089)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) - (6{,}845)\,\eta^2 \frac{\cos}{\sin}(3w-2\mathrm{v}) + (7{,}089)\,\eta\eta' \frac{\cos}{\sin}(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Die vier letzten Glieder liegen unterhalb unserer Genauigkeitsgrenze; wir haben sie aber der Vollständigkeit wegen mit hingeschrieben.

4. Hiermit sind unsere instantanen Elemente bestimmt.

Es wird

$$231)\quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\overline{e}\cos\overline{\mathrm{v}}+\overline{R}} = \frac{\overline{p}}{1+\overline{e}\cos\overline{\mathrm{v}}}.$$

*) Es kann zuweilen zweckmäßig sein, in $\overline{\xi}_3$ und $\overline{\xi}_4$ die Glieder mehrerer Typen zu berücksichtigen, falls sich nämlich der behandelte Planet gleichzeitig mehreren verschiedenen Typen nähert.

Setzt man

$$\bar{p} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\nu}, \tag{232}$$

so wird

$$\delta p = -a(1-\eta^2)\frac{\nu}{1+\nu} \tag{233}$$

und

$$\nu = \frac{\overline{R}}{1+\eta\cos\mathrm{v}+\bar{\xi}_1}. \tag{234}$$

Um den Ausdruck für ν aufzustellen, entwickeln wir

$$\begin{aligned}\nu = &\left\{1+\tfrac{1}{2}\eta^2+\tfrac{3}{8}\eta^4-(\eta+\tfrac{3}{4}\eta^3)\cos\mathrm{v}+(\tfrac{1}{2}\eta^2+\tfrac{1}{2}\eta^4)\cos 2\mathrm{v}-\tfrac{1}{4}\eta^3\cos 3\mathrm{v}+\tfrac{1}{8}\eta^4\cos 4\mathrm{v}\right\}\overline{R} \\ &+\left\{-1-\tfrac{3}{2}\eta^2+(2\eta+3\eta^3)\cos\mathrm{v}-\tfrac{3}{2}\eta^2\cos 2\mathrm{v}+\eta^3\cos 3\mathrm{v}\right\}\overline{R}\,\bar{\xi}_1,\end{aligned} \tag{235}$$

wo die sechsten Potenzen allgemein und die dritten von $\overline{R}$ und $\bar{\xi}_1$ vernachlässigt sind. Für uns genügt es, zu setzen:

$$\nu = \overline{R}(1-\eta\cos\mathrm{v}). \tag{235a}$$

Wir erhalten zunächst den Ausdruck für

$$\overline{R} = R-\bar{\xi}_1, \tag{236}$$

der sich von R — außer durch die vier letzten kleinen Glieder in 230) — nur dadurch unterscheidet, daß das Glied in $\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)$ ganz fortfällt, während das Glied in $\eta\cos(3w-\mathrm{v})$ sich auf den Faktor $(2+\delta)R_{3.0.0}$ reduziert, der sich bei der Transformation auf die Argumente ψ, φ, φ_1 gegen das entsprechende aus dem Gliede in $3w$ entstehende aufhebt; für unser Beispiel ist der erwähnte Faktor zu vernachlässigen; die beiden letzten Glieder des Ausdrucks 230) wollen wir dabei mitnehmen, obwohl sie klein sind, weil R Glieder der gleichen Form enthält, mit denen sie sich vereinigen. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}\nu = \;&(5{,}462) -(6{,}590)\eta\cos(2w+\mathrm{v}) +(8{,}564)\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) -(8{,}930)\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-(6{,}466)\cos w +(7{,}631)\eta\cos(2w-\mathrm{v}) -(7{,}731)\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v}) +(8{,}237)\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+(6{,}891)\cos 2w -(6{,}657)\eta\cos(4w-\mathrm{v}) +(7{,}457)\eta^2\cos(5w-2\mathrm{v}) -(8{,}039)\eta\eta'\cos(5w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+(5{,}977)\cos 3w -(6{,}975)\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)\\ &+(6{,}993)\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1).\end{aligned} \tag{237}$$

Transformieren wir auf ψ, φ, φ_1 (Kap. I), so wird:

$$\begin{aligned}\nu = \;&(5{,}462) +(6{,}789)\eta\cos(2\psi+\varphi) +(8{,}564)\eta^2\cos(3\psi-2\varphi) -(8{,}930)\eta\eta'\cos(3\psi-\varphi-\varphi_1)\\ &-(6{,}466)\cos\psi +(7{,}514)\eta\cos(2\psi-\varphi) -(7{,}731)\eta^2\cos(4\psi-2\varphi) +(8{,}237)\eta\eta'\cos(4\psi-\varphi-\varphi_1)\\ &+(6{,}891)\cos 2\psi -(6{,}657)\eta\cos(4\psi-\varphi) +(7{,}457)\eta^2\cos(5\psi-2\varphi) -(8{,}039)\eta\eta'\cos(5\psi-\varphi-\varphi_1)\\ &+(5{,}977)\cos 3\psi -(6{,}975)\eta'\cos(2\psi-\varphi_1)\\ &+(6{,}993)\eta'\cos(4\psi-\varphi_1).\end{aligned} \tag{238}$$

5. Zur Ermittelung von δL machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie S. 72—73, und erhalten ganz analog der Gleichung 179)

$$239)\qquad \begin{aligned} \delta L = & \left\{-2 + \left(\tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{3}{8}\eta^3\right)\cos \mathrm{v} - \cdots\right\}\overline{\xi}_2 \\ & + \left\{\left(\tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{9}{8}\eta^3\right)\sin \mathrm{v} - \cdots\right\}\overline{\xi}_1 \\ & + \cdots \\ & - W, \end{aligned}$$

wo wir den Ausdruck nicht ausschreiben, wegen seiner Analogie mit 179). Für uns genügt es zu setzen

$$239a)\qquad \delta L = -2\overline{\xi}_2 - W + \tfrac{3}{2}\left(\overline{\xi}_1\,\eta\sin \mathrm{v} + \overline{\xi}_2\,\eta\cos \mathrm{v}\right).$$

Wir erhalten, wenn wir das Resultat gleich in ψ, φ, φ_1 ausdrücken:

$$240)\quad \delta L = \begin{array}{lll} -(6{,}924)\sin\psi & -(6{,}391)\,\eta\sin(\psi+\varphi) & +(7{,}293)\,\eta'\sin(\psi-\varphi_1) \\ +(7{,}120)\sin 2\psi & +(6{,}654)\,\eta\sin(2\psi+\varphi) & -(7{,}733)\,\eta'\sin(2\psi-\varphi_1) \\ +(6{,}115)\sin 3\psi & -(7{,}002)\,\eta\sin(\psi-\varphi) & -(7{,}256)\,\eta'\sin(3\psi-\varphi_1) \\ & +(8{,}174)\,\eta\sin(2\psi-\varphi) & +(7{,}173)\,\eta'\sin(4\psi-\varphi_1) \\ & +(6{,}778)\,\eta\sin(3\psi-\varphi) & \\ & -(6{,}882)\,\eta\sin(4\psi-\varphi) & +(6{,}499)\,\varkappa\sin(\varphi+\Pi-\varrho L-\Gamma) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} +(7{,}459)\,\eta^2\sin 2\psi & +(0{,}0290)\,\eta\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1) & -(7{,}753)\,\varkappa^2\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+2\varrho L+2\Gamma) \\ -(7{,}461)\,\eta^2\sin(2\psi+2\varphi) & +(8{,}652)\,\eta\eta'\sin(4\psi-\varphi-\varphi_1) & +(7{,}809)\,\varkappa\varkappa'\sin(3\psi-2\varphi-2\Pi+\varrho L+\Gamma+\Gamma_1) \\ -(7{,}132)\,\eta^2\sin(2\psi-2\varphi) & -(8{,}299)\,\eta\eta'\sin(5\psi-\varphi-\varphi_1) & -(8{,}596)\sin^2 j\sin(3\psi-2\chi) \\ -(9{,}4611)\,\eta^2\sin(3\psi-2\varphi) & & +(8{,}897)\sin j\sin j'\sin(3\psi-\chi-\chi_1) \\ -(8{,}110)\,\eta^2\sin(4\psi-2\varphi) & -(9{,}234)\,\eta'^2\sin(3\psi-2\varphi_1) & \\ +(7{,}730)\,\eta^2\sin(5\psi-2\varphi) & -(8{,}585)\,\eta'^2\sin(4\psi-2\varphi_1) & \\ & +(8{,}263)\,\eta'^2\sin(5\psi-2\varphi_1), & \end{array}$$

6. Bei der Bildung von δL und von ν heben sich einige Glieder zum Teil auf; es wird daher, namentlich bei stärker kommensurablen Planeten, zweckmäßig sein, diese nicht rein numerisch zu berechnen, sondern analytisch abzuleiten. Auch gilt hier, was schon bei der Ableitung der oskulierenden Elemente gesagt wurde, nämlich daß $\overline{\xi}_2$ mit seinem doppelten Betrage in δL eingeht; indessen ist hier $\overline{\xi}_2$ leicht mit der erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen, da es nur wenige Glieder enthält. Wir wollen uns aber hier mit einigen Andeutungen in dieser Richtung begnügen und nur die Glieder in δL, welche im Argument die Größe $3w$ enthalten analytisch ableiten:

Wir hatten nach 227) und 229) mit Fortlassung des kleinen Gliedes in b_8:

$$241)\quad \left.\begin{array}{l}\overline{\xi}_1 \\ \overline{\xi}_2\end{array}\right\} = \left[\beta_1 - (2+\delta)\,R_{3\cdot 0\cdot 0}\right]\eta\,{\cos \atop \sin}(3\psi - 2\varphi + \mathrm{v}) + \beta_2\,\eta'\,{\cos \atop \sin}(3\psi - \varphi - \varphi_1 + \mathrm{v}).$$

Da

$$\mathrm{v} = \varphi + \Phi - K - V,$$

so wird, wenn wir nach Potenzen von Φ entwickeln, dabei $\Phi = 2\eta \sin\varphi$ setzen und K und V in den Argumenten vernachlässigen:

$$242)\quad \begin{aligned} \bar{\xi}_2 = {} & [\beta_1 - (2+\delta) R_{3.0.0}]\,\eta \sin(3\psi - \varphi) + \beta_2 \eta' \sin(3\psi - \varphi_1) \\ & + \beta_1 \eta^2 \sin 3\psi + \beta_2 \eta\eta' \sin(3\psi + \varphi - \varphi_1) \\ & - \beta_1 \eta^2 \sin(3\psi - 2\varphi) - \beta_2 \eta\eta' \sin(3\psi - \varphi - \varphi_1). \end{aligned}$$

Ferner haben wir unter Fortlassung des kleinen Faktors $R_{3.0.0}$

$$243)\quad \bar{\xi}_1 \eta \sin \mathrm{v} + \bar{\xi}_2 \eta \cos \mathrm{v} = \beta_1 \eta^2 \sin(3\psi - 2\varphi + 2\mathrm{v}) + \beta_2 \eta\eta' \sin(3\psi - \varphi - \varphi_1 + 2\mathrm{v})$$

und, wenn dieser Ausdruck wie der vorige entwickelt wird:

$$244)\quad \begin{aligned} \bar{\xi}_1 \eta \sin \mathrm{v} + \bar{\xi}_2 \eta \cos \mathrm{v} = {} & \beta_1 \eta^2 \sin 3\psi \quad + \beta_2 \eta\eta' \sin(3\psi + \varphi - \varphi_1) \\ & + 2\beta_1 \eta^3 \sin(3\psi + \varphi) \quad + 2\beta_2 \eta^2 \eta' \sin(3\psi + 2\varphi - \varphi_1) \\ & - 2\beta_1 \eta^3 \sin(3\psi - \varphi) \quad - 2\beta_2 \eta^2 \eta' \sin(3\psi - \varphi_1). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Glieder dritten Grades mitgenommen, was eigentlich nicht konsequent ist, da wir sie vorher in $\bar{\xi}_2$ vernachlässigt haben. Indessen haben wir oben bei Bildung des Ausdrucks 26) für W die noch merkbaren Glieder dritten Grades berücksichtigt und aus diesem Grunde haben wir hier dasselbe getan, um das Aufheben dieser Glieder nachweisen zu können und die analytische Ableitung möglichst in Uebereinstimmung mit der numerischen zu bringen. Auf Vollständigkeit der Berücksichtigung der Glieder dritten Grades haben wir gleich verzichtet. Bei eingehenderen Untersuchungen über stärker kommensurable Planeten wird man in dieser Beziehung aller unsere Entwicklungen weiter zu führen haben.

Der in Betracht kommende Teil von W ist (siehe Teil III, S. 12)

$$245)\quad \begin{aligned} \text{pars}\, W = W_{3.0.0} \sin 3w & + \gamma_1 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta^2 \sin 3w + \varepsilon_5 \eta^2 \sin(3w - 2\mathrm{v}) - \beta_1 \eta^2 \sin(3w + \mathrm{v}) \\ & + \gamma_2 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1) + \gamma_9 \eta\eta' \sin(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \varepsilon_6 \eta\eta' \sin(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \beta_2 \eta^2 \eta' \sin(3w + 2\mathrm{v} - \mathrm{v}_1), \end{aligned}$$

wo wir der Kürze halber die Glieder mit den Faktoren η'^2, $\varkappa^2$, $\varkappa\varkappa'$, $\sin^2 j$, $\sin j \sin j'$ fortlassen, da sie für diese Entwicklung ohne Bedeutung sind.

Da

$$246)\quad \begin{aligned} 3w &= 3\psi + (2+\delta)(\Phi - K) - 3V, \\ \mathrm{v} &= \varphi + \Phi - K - V, \\ \mathrm{v}_1 &= \varphi_1 + \Phi - K - V, \end{aligned}$$

so ergibt die Transformation auf ψ, φ, φ_1 unter Fortlassung kleinerer Glieder

$$247)\quad \begin{aligned} \text{pars}\, W = W_{3.0.0} \sin 3\psi & + 2 W_{3.0.0} \eta \sin(3\psi + \varphi) + [\gamma_8 + (1+\delta)\gamma_1]\eta^2 \sin 3\psi + [\varepsilon_5 - (1+\delta)\gamma_1]\eta^2 \sin(3\psi - 2\varphi) \\ & + (\gamma_1 - 2 W_{3.0.0})\eta \sin(3\psi - \varphi) + [\gamma_4 + (1+\delta)\gamma_2]\eta\eta' \sin(3\psi + \varphi - \varphi_1) + [\varepsilon_6 - (1+\delta)\gamma_2]\eta\eta' \sin(3\psi - \varphi - \varphi_1) \\ & + \gamma_2 \eta' \sin(3\psi - \varphi_1) \end{aligned}$$

$$+[(2+\delta)\gamma_8-\beta_1]\eta^3\sin(3\psi+\varphi) \quad +[\delta.\varepsilon_5-(2+\delta)\gamma_8]\eta^3\sin(3\psi-\varphi) \quad -\delta.\varepsilon_5\eta^3\sin(3\psi-3\varphi)$$
$$+[(2+\delta)\gamma_9-\beta_2]\eta^2\eta'\sin(3\psi+2\varphi-\varphi_1) \quad +[\delta.\varepsilon_6-(2+\delta)\gamma_9]\eta^2\eta'\sin(3\psi-\varphi_1) \quad -\delta.\varepsilon_6\eta^2\eta'\sin(3\psi-2\varphi-\varphi_1).$$

Nach den Formeln 83) und 108) des zweiten Teils ist aber

$$248)\qquad \begin{aligned}(1+\delta)\gamma_1 &= -2\beta_1+c_1, & (2+\delta)\gamma_8 &= 3\beta_1+c_3,\\ (1+\delta)\gamma_2 &= -2\beta_2+c_2, & (2+\delta)\gamma_9 &= 3\beta_2+c_4,\end{aligned}$$

wo wir für den Augenblick die kleineren Glieder abgekürzt bezeichnen:

$$249)\qquad \begin{aligned}c_1 &= \quad a_3+(6b_0-2a_0)\beta_1+3R_{3.0.0}-S_{3.0.0},\\ c_2 &= \quad a_4+(6b_0-2a_0)\beta_2,\\ c_3 &= -a_3+S_{3.2.0}-2R_{3.2.0}+3R^{+1}_{3.1.0}-S^{+1}_{3.1.0}-3R_{3.0.0},\\ c_4 &= -a_4+S^{+1}_{3.1.1}-2R^{+1}_{3.1.1}.\end{aligned}$$

Es wird also nach 239) mit Rücksicht auf das vorige:

$$250)\quad \begin{aligned}\text{pars}\,\delta L = &-W_{3.0.0}\sin 3\psi-2W_{3.0.0}\eta\sin(3\psi+\varphi) & &+(\tfrac{1}{2}\delta.\gamma_8-c_1-\tfrac{1}{2}c_3)\eta^2\sin 3\psi\\ &+[2W_{3.0.0}+4(1+\delta)R_{3.0.0}+\delta.\gamma_1-c_1]\eta\sin(3\psi-\varphi) & &+(\tfrac{1}{2}\delta.\gamma_9-c_2-\tfrac{1}{2}c_4)\eta\eta'\sin(3\psi+\varphi-\varphi_1)\\ &+(\delta.\gamma_2-c_2)\eta'\sin(3\psi-\varphi_1) & &-(\varepsilon_5-c_1)\eta^2\sin(3\psi-2\varphi)\\ & & &-(\varepsilon_6-c_2)\eta\eta'\sin(3\psi-\varphi-\varphi_1)\end{aligned}$$

$$+(\beta_1-c_3)\eta^3\sin(3\psi+\varphi) \quad -(\delta.\varepsilon_5-c_3)\eta^3\sin(3\psi-\varphi) \quad +\delta.\varepsilon_5\eta^3\sin(3\psi-3\varphi)$$
$$+(\beta_2-c_4)\eta^2\eta'\sin(3\psi+2\varphi-\varphi_1) \quad -(\delta.\varepsilon_6-c_4)\eta^2\eta'\sin(3\psi-\varphi_1) \quad +\delta.\varepsilon_6\eta^2\eta'\sin(3\psi-2\varphi-\varphi_1).$$

7. Die für $\bar{\xi}_3$, $\bar{\xi}_4$, ν, δL gefundenen Ausdrücke 225), 238), 240) transformieren wir nun wieder zum Zwecke der Tabulierung und setzen:

$$251)\qquad \delta L = \Sigma\bar{A}_n\sin\frac{n}{3}L+\Sigma\bar{B}_n\cos\frac{n}{3}L,$$

$$252)\qquad \nu = \Sigma\bar{C}_n\sin\frac{n}{3}L+\Sigma\bar{D}_n\cos\frac{n}{3}L.$$

Es wird:

$$253)\qquad \left.\begin{matrix}\bar{\xi}_3\\ \bar{\xi}_4\end{matrix}\right\} = \pm(8{,}110)\,\eta\,{\cos\atop\sin}(3f-2u)\mp(8{,}354)\,\eta'\,{\cos\atop\sin}(3f-u-u_1),$$

$$254)\qquad \begin{aligned}\bar{B}_0 = \;&(9{,}4611)\,\eta^2\sin(3f-2u)-(0{,}0290)\,\eta\eta'\sin(3f-u-u_1)+(9{,}234)\,\eta'^2\sin(3f-2u_1)\\ &+(7{,}753)\,\varkappa^2\sin(3f-2\varsigma L-2\Gamma)-(7{,}809)\,\varkappa\varkappa'\sin(3f-\varsigma L-\Gamma-\Gamma_1)\\ &+(8{,}596)\sin^2 j\sin(3f-2u)-(8{,}897)\sin j\sin j'\sin(3f-u-u_1),\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{A}_3\\ \bar{B}_3\end{matrix}\right\} = \pm(6{,}778)\,\eta\,{\cos\atop\sin}(3f-u)\mp(7{,}256)\,\eta'\,{\cos\atop\sin}(3f-u_1)\pm(6{,}499)\,\varkappa\,{\cos\atop\sin}(\varsigma L+\Gamma),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{A}_6\\ \bar{B}_6\end{matrix}\right\} = \pm(6{,}115)\,{\cos\atop\sin}3f.$$

Sonst ist für $n = 1, 2, 4, 5, 7, 10$

$$\begin{aligned}\bar{A}_n &= -A_n \\ \bar{B}_n &= -B_n\end{aligned} \quad \text{(siehe S. 15)},$$

wobei wir aber die Glieder 3. Grades unterdrücken.

$$255)\quad \bar{D}_0 = (5{,}462) + (8{,}564)\,\eta^2 \cos(3f-2u) - (8{,}930)\,\eta\eta' \cos(3f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{C}_1\\ \bar{D}_1\end{matrix}\right\} = (7{,}514)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f-u) - (6{,}975)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{C}_2\\ \bar{D}_2\end{matrix}\right\} = -(6{,}466)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} f - (7{,}731)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-2u) + (8{,}237)\,\eta\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(4f-u-u_1),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{C}_3\\ \bar{D}_3\end{matrix}\right\} = 0, \qquad \begin{matrix}\bar{C}_4 = C_4, \\ \bar{D}_4 = D_4,\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\bar{C}_5 = C_5, \\ \bar{D}_5 = D_5,\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{C}_6\\ \bar{D}_6\end{matrix}\right\} = (5{,}977)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f, \qquad \left.\begin{matrix}\bar{C}_7\\ \bar{D}_7\end{matrix}\right\} = (6{,}793)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f+u).$$

8. Nach weiterer Zerlegung wird

$$\left.\begin{matrix}\bar{\xi}_3\\ \bar{\xi}_4\end{matrix}\right\} = \pm \bar{e}_{0\cdot 3}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3f + \bar{f}_{0\cdot 3}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 3f,$$

$$256)\quad \bar{B}_0 = -\bar{a}_{0\cdot 3}\cos 3f + \bar{b}_{0\cdot 3}\sin 3f, \qquad \bar{C}_3 = \bar{D}_3 = 0,$$

während die Formeln für die übrigen Koeffizienten den Relationen 38) und 39), S. 16, ganz analog sind.

$$257)\quad \left.\begin{matrix}\bar{e}_{0\cdot 3}\\ \bar{f}_{0\cdot 3}\end{matrix}\right\} = (8{,}110)\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2u - (8{,}354)\,\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(u+u_1),$$

$$\begin{aligned}258)\quad \left.\begin{matrix}\bar{a}_{0\cdot 3}\\ \bar{b}_{0\cdot 3}\end{matrix}\right\} = {} & (9{,}4611)\,\eta^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u - (0{,}0290)\,\eta\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(u+u_1) + (9{,}234)\,\eta'^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u_1 \\ & + (7{,}753)\,\varkappa^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2\varsigma L + 2\Gamma) - (7{,}809)\,\varkappa\varkappa' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\varsigma L + \Gamma + \Gamma_1) \\ & + (8{,}596)\sin^2 j \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2u - (8{,}897)\sin j \sin j' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(u+u_1),\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{a}_{3\cdot 0}\\ \bar{b}_{3\cdot 0}\end{matrix}\right\} = (6{,}499)\,\varkappa \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\varsigma L + \Gamma) = -\left\{\begin{matrix}a_{3\cdot 0},\\ b_{3\cdot 0},\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{a}_{3\cdot 3}\\ \bar{b}_{3\cdot 3}\end{matrix}\right\} = (6{,}778)\,\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u - (7{,}256)\,\eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} u_1, \qquad \begin{matrix}\bar{a}_{6\cdot 3} = 0, \\ \bar{b}_{6\cdot 3} = (6{,}115).\end{matrix}$$

Die übrigen $\bar{a}$, $\bar{b}$-Koeffizienten brauchen wir nicht aufzuführen; sie sind gleich den entsprechenden a, b in den Formeln 116) mit entgegengesetzten Vorzeichen, wobei wir aber die Glieder 3. Grades unterdrücken.

259)
$$\bar{c}_{6\cdot 0} = (5{,}462) = c_{6\cdot 0},$$
$$\left.\begin{matrix}\bar{c}_{0\cdot 2}\\ \bar{d}_{0\cdot 2}\end{matrix}\right\} = (8{,}564)\,\eta^2 \,{\cos \atop \sin}\, 2u - (8{,}930)\,\eta\eta' \,{\cos \atop \sin}\, (u+u_1),$$
$$\left.\begin{matrix}\bar{c}_{1\cdot 2}\\ \bar{d}_{1\cdot 2}\end{matrix}\right\} = (7{,}514)\,\eta \,{\cos \atop \sin}\, u - (6{,}975)\,\eta' \,{\cos \atop \sin}\, u_1,$$
$$\bar{c}_{2\cdot 1} = -(6{,}466) = c_{2\cdot 1}, \qquad \left.\begin{matrix}\bar{c}_{2\cdot 2}\\ \bar{d}_{2\cdot 2}\end{matrix}\right\} = 0,$$
$$\left.\begin{matrix}\bar{c}_{2\cdot 4}\\ \bar{d}_{2\cdot 4}\end{matrix}\right\} = -(7{,}731)\,\eta^2 \,{\cos \atop \sin}\, 2u + (8{,}237)\,\eta\eta' \,{\cos \atop \sin}\, (u+u_1) = \left\{\begin{matrix}c_{2\cdot 4},\\ d_{2\cdot 4},\end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix}\bar{c}_{3\cdot 3}\\ \bar{d}_{3\cdot 3}\end{matrix}\right\} = 0, \qquad \begin{matrix}\bar{c}_{6\cdot 3} = (5{,}977),\\ \bar{d}_{6\cdot 3} = 0,\end{matrix}$$
$$\left.\begin{matrix}\bar{c}_{7\cdot 2}\\ \bar{d}_{7\cdot 2}\end{matrix}\right\} = (6{,}793)\,\eta \,{\cos \atop \sin}\, u.$$

Die übrigen $\bar{c}$, $\bar{d}$-Koeffizienten sind gleich den entsprechenden c, d in den Formeln 115).

9. Für die Tabulierung ergaben sich die Werte:

	$\bar{f}_{0\cdot 3}$	$\bar{a}_{0\cdot 3}$	$\bar{b}_{0\cdot 3}$
1910	−70	−448	−234
1920	70	449	233
1930	71	450	232
1940	72	451	230
1950	−72	−452	−229

$$\begin{matrix}\bar{e}_{0\cdot 3} = -123, & \bar{a}_{3\cdot 0} = +3, & \bar{a}_{3\cdot 3} = +4,\\ \bar{f}_{0\cdot 3}\ \text{s. oben}, & \bar{b}_{3\cdot 0} = -1, & \bar{b}_{3\cdot 3} = -8,\end{matrix} \quad \bar{b}_{6\cdot 3} = +13,$$

$$\bar{c}_{0\cdot 0} = +3, \quad \begin{matrix}\bar{c}_{0\cdot 2} = -36, & \bar{c}_{1\cdot 2} = 0,\\ \bar{d}_{0\cdot 2} = -32, & \bar{d}_{1\cdot 2} = +34,\end{matrix} \quad \bar{c}_{2\cdot 1} = -29, \quad \begin{matrix}\bar{c}_{2\cdot 2} = 0, & \bar{c}_{2\cdot 4} = +5,\\ \bar{d}_{2\cdot 2} = 0, & \bar{d}_{2\cdot 4} = +7,\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\bar{c}_{3\cdot 3} = 0,\\ \bar{d}_{3\cdot 3} = 0,\end{matrix} \quad \bar{c}_{6\cdot 3} = +10, \quad \begin{matrix}\bar{c}_{7\cdot 2} = +1,\\ \bar{d}_{7\cdot 2} = +7,\end{matrix}$$

wobei wir die Koeffizienten $\bar{a}_{1\cdot 1}$, $\bar{a}_{1\cdot 2}$, $\bar{a}_{2\cdot 1}$, $\bar{a}_{2\cdot 2}$, $\bar{a}_{2\cdot 4}$, $\bar{a}_{4\cdot 2}$, $\bar{a}_{4\cdot 5}$, $\bar{a}_{5\cdot 1}$, $\bar{a}_{5\cdot 4}$, $\bar{a}_{7\cdot 2}$, $\bar{a}_{10\cdot 2}$, $\bar{c}_{4\cdot 2}$, $\bar{c}_{4\cdot 5}$, $\bar{c}_{5\cdot 4}$ und die entsprechenden $\bar{b}$ und $\bar{d}$ nicht aufführen, weil sie gleich den analogen a, b, c, d auf S. 58 sind, und zwar die $\bar{a}$, $\bar{b}$ mit entgegengesetztem, die c, d mit gleichem Vorzeichen. Hiernach wurde sodann die Tafel 7 berechnet.

10. Die Neigung i und die Knotenlänge Ω definieren wir für die instantane Ellipse wie für die oskulierende (siehe S. 60); diese Größen haben wir schon in Tafel 3 aufgeführt. Die heliozentrischen Koordinaten berechnen sich aus den

Konstanten für den Aequator nach den Formeln 53) oder 66), nämlich

$$x = ar\cos(A+v_e) = ar\cos(\bar{A}+v),$$
259a) $$y = br\sin(B+v_e) = br\sin(\bar{B}+v),$$
$$z = cr\sin(C+v_e) = cr\sin(\bar{C}+v),$$

wo übrigens $v_e = v + \Omega - \Sigma$. Die Länge v_e wird dann identisch mit derjenigen in der oskulierenden Ellipse.

Zwölftes Kapitel.

Rechnungsbeispiel für die Opposition der Aegina 1910.

Wir wollen nun noch ein Beispiel zur Anwendung unserer gesamten Tafeln geben und zu diesem Zwecke die Opposition der Aegina des Jahres 1910 wählen, welche nach der Rechnung am 16. April stattfindet; unsere Rechnungen wurden auf den 14. April bezogen und wir wollen sie nach allen im Vorigen besprochenen Methoden geben.

1. Aus Tafel 3 finden wir zunächst diejenigen Werte, welche für alle Methoden gleicherweise gebraucht werden, nämlich für 1910 April 14,0 M. Z. Berlin:

260) $$L = 194^\circ{,}862, \qquad \log\sin i = 8{,}5710,$$
$$\tfrac{1}{8}L = 304^\circ{,}954, \qquad \Omega = 10^\circ{,}92,$$
$$A = -0^\circ{,}007, \qquad B = 0^\circ{,}186, \qquad C = -0^\circ{,}853,$$
$$\log a = 9{,}99999, \qquad \log b = 9{,}95532, \qquad \log c = 9{,}63479.$$

2. Wenden wir zunächst die Gyldénschen Koordinaten an, so ergibt sich aus Tafel 4

261) $$\left.\begin{aligned} R &= +109{,}3 \\ K &= +327{,}6 \\ V &= -376 \end{aligned}\right\} \text{Einheiten der 5. Dezimale,} \qquad \begin{aligned} \log\eta &= 9{,}02855, \\ \Pi &= 81^\circ{,}748, \end{aligned}$$
$$W = -48{,}4 = -0^\circ{,}028.$$

Hieraus:

262) $$M = 113^\circ{,}142, \qquad \varepsilon = 118^\circ{,}518, \qquad \mathrm{v} = 123^\circ{,}772$$

und die heliozentrischen Koordinaten in der Bahn

263) $$v = 205^\circ{,}520, \qquad \log r = 0{,}43443.$$

3. Wollen wir die oskulierenden Elemente durch Rechnung nach der indirekten Methode ableiten, so benutzen wir die eben gefundenen Werte und entnehmen nach Tafel 5 noch die Größen S und $\frac{dR}{dv}$, nämlich

264) $$S = -\tfrac{1}{2}x_1 = -43{,}2, \qquad \frac{dR}{dv} = +48{,}5.$$

Hieraus ergibt die indirekte Methode nach S. 67—68:

265) $$\begin{aligned} \log p &= 0{,}40873, & \mathrm{v}_e &= 123^\circ{,}028, \\ \log e &= 9{,}02292, & E &= 117^\circ{,}804, \\ \pi &= 82^\circ{,}492, & M_e &= 112^\circ{,}461, \\ \log a_e &= 0{,}41357, & L_e &= 194^\circ{,}953. \end{aligned}$$

Rechnet man hieraus den Ort, so ergibt sich notwendigerweise wieder:

266) $$v = 205^\circ{,}520, \qquad \log r = 0{,}43443.$$

4. Rechnet man nach der direkten Methode, bei welcher ebenfalls die in Nr. 1 gefundenen Werte von η und v benutzt werden, so findet man

267) $$\begin{aligned} &x_1 = -2S, \\ &\log \xi_1 = 7{,}2805, \quad \log \xi_3 = 7{,}1502_n, \quad \log e = 9{,}02280, \\ &\log \xi_2 = 6{,}6277_n, \quad \log \xi_4 = 7{,}1302_n, \quad \delta \mathrm{v} = -\delta\pi = -0^\circ{,}734, \end{aligned} \qquad \delta L = +0^\circ{,}093$$

und hieraus das Elementensystem

268) $$\begin{aligned} \log p &= 0{,}40873, \\ \log e &= 9{,}02280, \\ \pi &= 82^\circ{,}482, \\ \log a_e &= 0{,}41357, \\ L_e &= 194^\circ{,}955 \end{aligned}$$

in guter Uebereinstimmung mit dem Vorigen. Für die heliozentrischen Koordinaten ergeben die letzteren Elemente wieder:

269) $$v = 205^\circ{,}520, \qquad \log r = 0{,}43443.$$

5. Entnimmt man endlich die Störungen der oskulierenden Elemente direkt aus den Tafeln 6, mit Benutzung der Werte von L, $\tfrac{1}{2}L$, η, Π aus Tafel 3, so findet man in Einheiten der 5. Dezimale

270) $$\begin{aligned} \xi_3 &= -148{,}5, & \delta L &= +190{,}4 = 0^\circ{,}109, & \frac{\delta a}{a} &= +54{,}3, \\ \xi_4 &= -132{,}5, & x_1 &= +86{,}5 \end{aligned}$$



und hiermit

$$271)\qquad \begin{aligned} \log p &= 0{,}40873, \\ \log e &= 9{,}02250, \\ \pi &= 82^\circ{,}469, \\ L_e &= 194^\circ{,}971. \end{aligned}$$

Hier zeigt sich eine merkliche Differenz gegen die durch Rechnung ermittelten Werte. Die Differenzen sind offenbar durch die Aufstellung der Ausdrücke 197)—200) entstanden. In ihnen haben wir zwar prinzipiell die Glieder von derselben Größenordnung berücksichtigt, wie bei den Gyldénschen Koordinaten R, W und ihren Ableitungen; aber die vernachlässigten Glieder, welche unterhalb unserer gewählten Genauigkeitsgrenze (8″) liegen, spielen in beiden Methoden eine verschiedene Rolle, und geben in ihrer Gesamtheit zu der Differenz von $0^\circ{,}016$ in L_e Anlaß. Ich habe zur Kontrolle für mehrere Zeitpunkte von 1910—1950 die oskulierenden Elemente nach diesen verschiedenen Methoden gerechnet. Gerade unser Beispiel weist die größte Differenz auf. Im VIII. Kapitel des ersten Teils hatte ich angenommen, daß man den Fehler in der Darstellung eines Planetenortes etwa auf das Dreifache des größten vernachlässigten Gliedes schätzen könne; dies scheint aber zu niedrig gegriffen und man wird zum Teil auf den fünf- bis sechsfachen Betrag gefaßt sein müssen. Man vergleiche das S. 49—50 über die Darstellung der Beobachtungen Gesagte.

Für die heliozentrischen Koordinaten ergibt sich immer noch mit ausreichender Uebereinstimmung:

$$v = 205^\circ{,}525, \qquad \log r = 0{,}43443.$$

6. Benutzen wir endlich die instantanen Elemente, so entnehmen wir aus Tafel 7 die Koeffizienten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, sowie $\bar{e}$ und $\bar{\pi}$ und berechnen

$$272)\qquad \begin{aligned} \delta L &= +263{,}0 \\ \nu &= +8{,}0 \end{aligned} \text{ (Einheiten der 5. Dezimale)}, \qquad \delta L = +0^\circ{,}151,$$

woraus das Elementensystem folgt

$$273)\qquad \begin{aligned} \log \bar{p} &= 0{,}40832, & \bar{M} &= 113^\circ{,}079, \\ \log \bar{e} &= 9{,}02292, & \bar{E} &= 118^\circ{,}392, \\ \bar{\pi} &= 81^\circ{,}934, & \bar{v} &= 123^\circ{,}587, \\ \bar{L} &= 195^\circ{,}013. \end{aligned}$$

Die heliozentrischen Koordinaten finden sich hier zu:

$$274)\qquad v = 205^\circ{,}521, \qquad \log r = 0{,}43442.$$

7. Will man eine Oppositionsephemeride rechnen, welche sich über einen längeren Zeitraum erstreckt, so wird es am bequemsten sein, die Gyldénschen Koordinaten oder die instantanen Elemente etwa von 40 zu 40 Tagen zu rechnen;

auch kann man die oskulierenden Elemente in gleicher Weise benutzen. Für die Opposition 1910 ergeben unsere Tafeln die Gyldénschen Koordinaten.

1910	März 5,0	April 14,0	Mai 24,0
R	$+0{,}00098$	$+0{,}00109$	$+0{,}00115$
W	$0^\circ{,}000$	$-0^\circ{,}028$	$-0^\circ{,}055$
$\log\eta$	9,02855	9,02855	9,02855
Π	$81^\circ{,}747$	$81^\circ{,}748$	$81^\circ{,}750$

und hieraus

v	$196^\circ{,}855$	$205^\circ{,}520$	$213^\circ{,}943$
$\log r$	.0,42805	0,43443	0,44013.

Für die instantanen Elemente findet man:

1910	März 5,0	April 14,0	Mai 24,0
ν	$+0{,}00010$	$+0{,}00008$	$+0{,}00003$
δL	$+0^\circ{,}138$	$+0^\circ{,}151$	$+0^\circ{,}160$
$\log\bar{p}$	0,40831	0,40832	0,40834
$\bar{L}$	$185^\circ{,}542$	$195^\circ{,}013$	$204^\circ{,}479$
$\bar{e}$	9,02294	9,02292	9,02291
$\bar{\pi}$	$81^\circ{,}939$	$81^\circ{,}934$	$81^\circ{,}929$

und hieraus

v	$196^\circ{,}857$	$205^\circ{,}521$	$213^\circ{,}943$
$\log r$	0,42804	0,43442	0,44012.

Die Werte der mittleren Bewegung sind hier nicht angegeben, da sich die Werte der mittleren Länge $\bar{L}$ resp. die von δL direkt aus der Tafel 7 ergeben; zur Berechnung der Ephemeridenörter zwischen den Daten, für welche man die instantanen Elemente abgeleitet hat, wird man die entsprechenden Werte von $\bar{L}$ interpoliren (eventuell mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen) oder man wird aus den oben gefundenen Werten von $\bar{L}$ die instantane mittlere Bewegung und — wenn die zweiten Differenzen nicht verschwinden — auch die instantane mittlere Beschleunigung*) ableiten. Wenn man die drei Längen mit $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ bezeichnet, so ist offenbar

$$\text{mittlere Bewegung} = \frac{\bar{L}_3 - \bar{L}_1}{80} = n_1,$$

$$\text{mittlere Beschleunigung} = \frac{\bar{L}_3 - 2\bar{L}_2 + \bar{L}_1}{3200} = n_2,$$

*) Wir definieren die Beschleunigung hier so, wie man es bei der Sekularbeschleunigung des Mondes gewohnt ist, nämlich als den Koeffizienten von t^2, obwohl die eigentliche Beschleunigung bekanntlich doppelt so groß ist.

woraus sich für eine beliebige Zwischenzeit findet

$$\bar{L} = \bar{L}_2 + n_1 t + n_2 t^2,$$

t gezählt in Tagen von der mittleren Epoche.

Die hier in Rede stehende mittlere Bewegung hat natürlich nichts mit der S. 90 erwähnten mittleren Bewegung zu tun. Sie ist vielmehr rein empirisch zu verstehen.

Es wird in unserem Falle:

$$n_1 = 0^\circ{,}23671,$$
$$n_2 = -0^\circ{,}0000016.$$

Für die oskulierenden Elemente endlich ergibt sich aus unseren Tafeln für die drei Epochen

1910	März 5,0	April 14,0	Mai 24,0
ξ_3	$-0{,}00159$	$-0{,}00148$	$-0{,}00137$
ξ_4	$-0{,}00134$	$-0{,}00132$	$-0{,}00129$
δL	$+0^\circ{,}127$	$+0^\circ{,}109$	$+0^\circ{,}093$
x_1	$+0{,}00093$	$+0{,}00086$	$+0{,}00075$
$\frac{\delta a}{a}$	$+0{,}00059$	$+0{,}00054$	$+0{,}00045$

und die Elemente:

$\log p$	0,40876	0,40873	0,40868
$\log e$	9,02207	9,02250	9,02296
π	82°,475	82°,469	82°,452
$\log a_0$	0,41359	0,41357	0,41353
L_0	185°,531	194°,971	204°,412

und hieraus die Koordinaten:

v	196°,863	205°,525	213°,948
$\log r$	0,42805	0,43443	0,44013.

Die drei Werte von L geben, ähnlich wie oben bei den instantanen Elementen, die empirischen Werte:

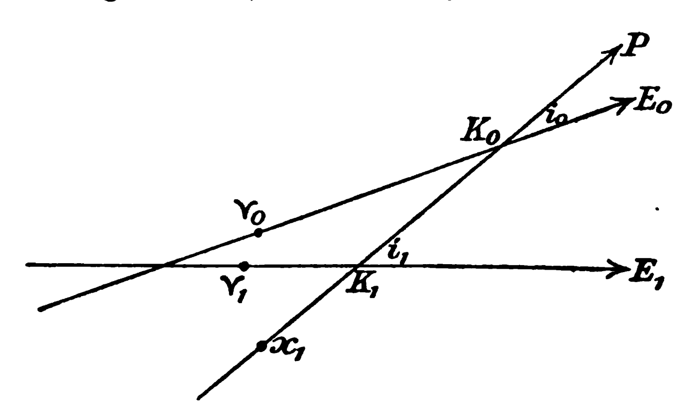
mittlere Bewegung = 0°,23601,
mittlere Beschleunigung = verschwindend klein.

8. Unsere Tafeln, ebenso wie die vorigen Beispiele berechneten Koordinaten und Elemente gelten für ein mittleres Aequinoktium (1900,0), auf das man alle

Größen dann beziehen wird, wenn man die Beobachtungen eines größeren Zeitraums zusammen diskutieren will. Für die Berechnung einer Ephemeride wird man aber die Elemente auf den jedesmaligen Jahresanfang zu beziehen wünschen. Die Reduktion eines Elementensystems auf eine andere Epoche ist eine bekannte Operation, auf die wir eigentlich nicht einzugehen brauchten. Indessen erfordert unsere Definition der Länge in der Bahn, gezählt von dem festen Punkte x_1 und die der Größe Σ einige Erläuterung. Es mag zunächst vorausgeschickt werden, daß die Reduktion der Knotenlänge Ω und der Neigung i stets nach den bekannten Formeln vor sich geht; sind i_0 und Ω_0 diese Größen für unsere Fundamentalepoche (oder eine andere) t_0 und i_1 und Ω_1 ihre Werte für das mittlere Aequinoktium zur Zeit t_1, so ist (vgl. Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie, S. 36)

275)
$$
\begin{aligned}
{}_1 &= \Omega_0 + [p - \varkappa \operatorname{ctg} i \sin(\Pi - \Omega)] \, . \, t, & t &= t_1 - t_0, \\
i_1 &= i_0 - \varkappa \cos(\Pi - \Omega) \, . \, t, & i, \Omega, p, \varkappa, \Pi \ \text{für} \ &\frac{t_0 + t_1}{2}.
\end{aligned}
$$

Da nun unsere Längen in der Bahn, d. h. zunächst die Größe v und damit auch L und Π von dem festen Punkte x_1 gezählt sind, so erfordern diese keine Reduktion bei der Uebertragung der Bahnlage auf ein anderes Aequinoktium; dagegen muß die Größe Σ reduziert werden. Man kann diese Reduktion leicht aus der folgenden Figur ablesen, in welcher E_0 bezw. E_1 die mittlere Ekliptik



zur Zeit t_0 bezw. t_1, P die Planetenbahn, Υ_0 und Υ_1 die Lage des Frühlingspunktes zu beiden Zeiten und x_1 der feste Punkt ist, von dem wir unsere Länge zählen und den wir (vgl. II. Teil, S. 83) so definiert hatten, daß die Größe X_2 (und damit bei kleinen Neigungen auch die Größe $\Omega - \Sigma$) in der Nullepoche verschwand. Dieser feste Punkt liegt eigentlich, eben weil er fest ist, nicht in der oskulierenden Ebene der Planetenbahn; wir können aber statt seiner den Punkt in dieser Ebene substituieren, von dem aus gezählt die wahre Länge v in der oskulierenden Bahn den gleichen Betrag hat, wie von dem ursprünglichen festen Punkt.

In der Figur ist

$$\Upsilon_0 K_0 = \Omega_0, \qquad x_1 K_0 = \Sigma_0,$$
$$\Upsilon_1 K_1 = \Omega_1, \qquad x_1 K_1 = \Sigma_1$$

und die Reduktion $\Sigma_1 - \Sigma_0$ ist gleich dem Stück $K_0 K_1$ oder gleich demselben Betrag, um die bei den für die Ellipse üblichen Definitionen die Größe Perihel—Knoten zu reduzieren ist und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen, also

$$276) \qquad \Sigma_1 = \Sigma_0 - \pi \operatorname{cosec} i \sin(\Pi - \Omega) \, . \, t,$$

wo die Bezeichnungen die gleichen sind, wie oben. Die Reduktion der Größe $\Omega - \Sigma$ ist dann die folgende:

$$277) \qquad \Omega_1 - \Sigma_1 = \Omega_0 - \Sigma_0 + \left[p + \pi \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin(\Pi - \Omega)\right] t;$$

dies ist der gleiche Betrag, um den bei den für die Ellipse üblichen Definitionen die Längen in der Bahn — auch die des Perihels — reduziert wird.

Der Annehmlichkeit, daß bei unseren Definitionen die Längen v, L und Π keiner Reduktion auf ein anderes Aequinoktium bedürfen, steht also die kleine Unbequemlichkeit gegenüber, daß an die Größe $\Omega - \Sigma$ eine solche anzubringen ist und daß diese Größe, die bei kleinen Neigungen, wie auch in unserem Beispiel Aegina, für die Fundamentalepoche verschwindet, bei einer Rechnung für bewegliche Aequinoktien stets mit in Rechnung gezogen werden muß.

Das Gesagte kommt aber nur in Betracht, wenn man die Gyldénschen Koordinaten benutzt (Tafel 4). Bedient man sich der am Fuße dieser Tafel angeführten Relationen zur Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, so wird man entweder diese für das Aequinoktium der Fundamentalepoche berechnen und sie dann nach den Gleichungen 59) reduzieren, oder man wird die Größen a, A, b, B, c, C aus den bereits reduzierten Werten von i und Ω berechnen und diese sowie den reduzierten Wert von $\Omega - \Sigma$ in den Formeln für x, y, z am Fuße der Tafel verwenden; v ist nicht zu reduzieren. Berechnet man die heliozentrischen Koordinaten l und b, so wird man diese erst für die Fundamentalepoche ermitteln und sodann reduzieren.

9. Leitet man ein oskulierendes (Tafel 6) oder instantanes (Tafel 7) Elementensystem ab, so wird man dieses zunächst für das Fundamental-Aequinoktium finden und dann nach bekannten Formeln zu reduzieren haben. Man würde dann aber die Konstanten für den Aequator a, A, b, B, c, C neu zu berechnen haben und aus diesem Grunde wollen wir im Folgenden Formeln geben, nach denen diese Konstanten direkt auf ein anderes Aequinoktium übertragen werden können.

Bezeichnet man mit x_0, y_0, z_0, a_0, A_0 u. s. w. die Werte dieser Größen bezogen auf das mittlere Aequinoktium zur Zeit t_0, und mit x_1, y_1, z_1, a_1, A_1 u. s. w. die für das Aequinoktium zur Zeit t_1, so ist nach 53)

$$x_0 = a_0 r \cos(A_0 + v + \Omega_0 - \Sigma_0),$$
$$x_1 = a_1 r \cos(A_1 + v + \Omega_1 - \Sigma_1)$$

und analog für y und z.

Setzen wir diese Werte in die Reduktionsgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten 59) ein, so wird:

$$a_1 \cos(A_1+v+\Omega_1-\Sigma_1) = \left(1-\frac{m^2+n^2}{2}t^2\right)a_0 \cos(A_0+v+\Omega_0-\Sigma_0)$$
$$-mb_0 t \sin(B_0+v+\Omega_0-\Sigma_0) - nc_0 t \sin(C_0+v+\Omega_0-\Sigma_0),$$
$$b_1 \sin(B_1+v+\Omega_1-\Sigma_1) = \left(1-\frac{m^2}{2}t^2\right)b_0 \sin(B_0+v+\Omega_0-\Sigma_0)$$
$$+ma_0 t \cos(A_0+v+\Omega_0-\Sigma_0) - \frac{mn}{2}c_0 t^2 \sin(C_0+v+\Omega_0-\Sigma_0),$$
$$c_1 \sin(C_1+v+\Omega_1-\Sigma_1) = \left(1-\frac{n^2}{2}t^2\right)c_0 \sin(C_0+v+\Omega_0-\Sigma_0)$$
$$+na_0 t \cos(A_0+v+\Omega_0-\Sigma_0) - \frac{mn}{2}b_0 t^2 \sin(B_0+v+\Omega_0-\Sigma_0).$$

Macht man in diesen Gleichungen, die für jeden Wert von v gelten, einmal $v = -(\Omega_0-\Sigma_0)$ und dann $v_0 = 90^\circ-(\Omega_0-\Sigma_0)$, und bezeichnet man der Kürze halber

$$\varDelta = \Omega_1-\Sigma_1-(\Omega_0-\Sigma_0)$$

so ist:

$$\begin{aligned} a_1 \sin(A_1+\varDelta) &= a_0 \sin A_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2, \qquad t = t_1-t_0,\\ a_1 \cos(A_1+\varDelta) &= a_0 \cos A_0+\alpha_3 t+\alpha_4 t^2,\\ b_1 \sin(B_1+\varDelta) &= b_0 \sin B_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2,\\ b_1 \cos(B_1+\varDelta) &= b_0 \cos B_0+\beta_3 t+\beta_4 t^2,\\ c_1 \sin(C_1+\varDelta) &= c_0 \sin C_0+\gamma_1 t+\gamma_2 t^2,\\ c_1 \cos(C_1+\varDelta) &= c_0 \cos C_0+\gamma_3 t+\gamma_4 t^2, \end{aligned} \tag{278}$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= mb_0 \cos B_0+nc_0 \cos C_0, & \beta_1 &= ma_0 \cos A_0, & \gamma_1 &= na_0 \cos A_0,\\ \alpha_2 &= -\frac{m^2+n^2}{2}a_0 \sin A_0, & \beta_2 &= -\frac{m^2}{2}b_0 \sin B_0-\frac{mn}{2}c_0 \sin C_0, & \gamma_2 &= -\frac{n^2}{2}c_0 \sin C_0-\frac{mn}{2}b_0 \sin B_0,\\ \alpha_3 &= -mb_0 \sin B_0-nc_0 \sin C_0, & \beta_3 &= -ma_0 \sin A_0, & \gamma_3 &= -na_0 \sin A_0,\\ \alpha_4 &= -\frac{m^2+n^2}{2}a_0 \cos A_0, & \beta_4 &= -\frac{m^2}{2}b_0 \cos B_0-\frac{mn}{2}c_0 \cos C_0, & \gamma_4 &= -\frac{n^2}{2}c_0 \cos C_0-\frac{mn}{2}b_0 \cos B_0, \end{aligned} \tag{279}$$

$$\varDelta = [p+\varkappa \operatorname{tg} i \sin(\Pi-\Omega)] \,.\, t.$$

Die Größen $p, \varkappa, \Pi$, haben die übliche Bedeutung (s. S. 103) und ihre Werte, sowie die von m, n, i, Ω sind für die Zeit $\frac{t_0-t_1}{2}$ zu nehmen.

Bedient man sich nun — wenn man etwa eine Rechenmaschine zur Hand hat — der Form 57) zur Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten, so wird man schreiben:

bei der Rechnung mit Gyldénschen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(A_1+\Delta) \,.\, r\cos(v+\Omega_0-\Sigma_0) - a_1 \sin(A_1+\Delta) \,.\, r\sin(v+\Omega_0-\Sigma_0), \\ y_1 &= b_1 \sin(B_1+\Delta) \,.\, r\cos(v+\Omega_0-\Sigma_0) + b_1 \cos(B_1+\Delta) \,.\, r\sin(v+\Omega_0-\Sigma_0), \\ z_1 &= c_1 \sin(C_1+\Delta) \,.\, r\cos(v+\Omega_0-\Sigma_0) + c_1 \cos(C_1+\Delta) \,.\, r\sin(v+\Omega_0-\Sigma_0), \end{aligned} \tag{280}$$

bei der Rechnung mit oskulierenden Elementen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(A_1+\Delta) \,.\, r\cos v_{s.0} - a_1 \sin(A_1+\Delta) \,.\, r\sin v_{s.0}, \\ y_1 &= b_1 \sin(B_1+\Delta) \,.\, r\cos v_{s.0} + b_1 \cos(B_1+\Delta) \,.\, r\sin v_{s.0}, \\ z_1 &= c_1 \sin(C_1+\Delta) \,.\, r\cos v_{s.0} + c_1 \cos(C_1+\Delta) \,.\, r\sin v_{s.0} \end{aligned} \tag{281}$$

und ebenso bei der Rechnung mit instantanen Elementen. Die Größe $v_{s.0}$ ist der Wert der Länge in der Bahn mit bezug auf das mittlere Aequinoktium für die Fundamentalepoche und gezählt vom aufsteigenden Knoten. Man braucht also, wenn man die vorstehenden Formeln anwendet, außer der durch die Gleichungen 278) erfolgenden gar keine Reduktion für Präzession anzubringen und auch die Größe Δ garnicht auszurechnen.

In unserer Tafel 3 haben wir die Daten zur Reduktion von $a_0 \sin A_0$, $a_0 \cos A_0$ u. s. w. für 1900,0 auf die Größen $a_1 \sin(A_1+\Delta)$, $a_1 \cos(A_1+\Delta)$ u. s. w. für den jeweiligen Jahresanfang eingefügt, und zwar sind unter der Ueberschrift „Präzession" die Werte von $\alpha_1+\alpha_2 t$, $\alpha_3+\alpha_4 t$ u. s. w. tabuliert.

Bedient man sich dagegen der Form 53) zur Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten, also bei Anwendung Gyldénscher Koordinaten oder oskulierender bezw. instantaner Elemente:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos(A+v+\Omega-\Sigma) = ar\cos(A+v_s), \\ y &= br\sin(B+v+\Omega-\Sigma) = br\sin(B+v_s), \\ z &= cr\sin(C+v+\Omega-\Sigma) = cr\sin(C+v_s), \end{aligned} \tag{282}$$

so wird man wünschen, die Präzession direkt an die Größen a, b, c und $A+\Omega-\Sigma$, $B+\Omega-\Sigma$, $C+\Omega-\Sigma$ resp. $A+v_s$, $B+v_s$, $C+v_s$ anzubringen, wobei v ungeändert bleibt. Die Reduktionen für diese sind leicht aus den vorigen abzuleiten und sind ebenfalls in der Tafel 3 gleich mit angegeben. Auch hier erspart man die Reduktion aller Längen, indem man diese nur an die eben genannten Größen anbringt.

Schlussbemerkung.

Mit dem vorliegenden Bande sollen die Mitteilungen über die Theorie der kleinen Planeten vorläufig abgeschlossen werden, obwohl, wie im Text bereits mehrfach erwähnt ist, noch manche Rechenarbeit zu leisten und zum Teil schon geleistet ist, um Tafeln zur Berechnung der kleinen Planeten in vollem wünschenswerten Umfange herzustellen. — Wenn ich von denjenigen Planeten, deren mittlere Bewegung kleiner als 709″ ist und welche in unsern Tafeln noch garnicht berücksichtigt sind, absehe, so wären doch noch die Glieder von höherem als zweitem Grade nachzutragen, die namentlich bei den Planeten vom $\frac{2}{5}$-Typus recht merkliche Beträge erreichen können. Auch sollte die Berechnung der Tafeln des dritten Teils soweit fortgesetzt werden, daß man aus ihnen direkt die Koeffizienten der auf die Zeit als unabhängiger Variabler transformierten Ausdrücke der Gyldénschen Koordinaten und der instantanen Elemente entnehmen kann.

Besonders mag noch bemerkt werden, daß die in diesem Teil gegebenen Methoden zur Vergleichung mit den Beobachtungen und zur Entwerfung von Bewegungstafeln in gleicher Weise benutzt werden können, nicht nur, wenn die Störungen in vollständigerem Maße berücksichtigt werden, als wir es getan haben, sondern auch, wenn diese nach irgend einer andern Störungstheorie ermittelt worden sind.

Andererseits werden, wie dies auch im Text häufig bemerkt ist, unsere Methoden wesentlich abgekürzt und vereinfacht werden können, wenn es sich nur um eine rohere Darstellung der Beobachtungen handelt.

Tafel 1. — Tafeln für (91) Aegina 1866—1910 nach den Elementen III.
Vgl. S. 55.

Jan. 0,0	L		$\frac{1}{3}L$	V		log sin i	$\Sigma = \Omega$
1866	330°,868	— 9 × 360°	110°,289	+ 504	15	8,5724	11°,52
67	57,164	— 8 × 360°	139,055	489	18	5723	49
68	143,460	„ „	167,820	471	21	5722	47
69	229,993	„ „	196,664	450	25	5722	45
1870	316,290	— 8 × 360°	225,430	+ 425	27	8,5721	11,42
71	42,586	— 7 × 360°	254,195	398	30	5721	40
72	128,882	„ „	282,961	368	32	5720	38
73	215,415	„ „	311,805	336	34	5720	36
74	301,712	— 7 × 360°	340,571	302	37	5720	33
1875	28,008	— 6 × 360°	9,336	+ 265	38	8,5720	11,31
76	114,304	„ „	38,101	227	40	5719	29
77	200,837	„ „	66,946	187	41	5719	27
78	287,133	— 6 × 360°	95,711	146	42	5719	25
79	13,430	— 5 × 360°	124,477	104	42	5719	23
1880	99,726	„ „	153,242	+ 62	43	8,5719	11,21
81	186,259	„ „	182,086	+ 19	44	5719	19
82	272,555	„ „	210,852	— 25	43	5719	18
83	358,852	— 5 × 360°	239,617	68	42	5719	16
84	85,148	— 4 × 360°	268,383	110	42	5719	14
1885	171,681	„ „	297,227	— 152	41	8,5719	11,13
86	257,977	„ „	325,992	193	40	5719	11
87	344,274	— 4 × 360°	354,758	233	38	5719	10
88	70,570	— 3 × 360°	23,523	271	36	5719	08
89	157,103	„ „	52,368	307	34	5719	07
1890	243,399	„ „	81,133	— 341	32	8,5719	11,06
91	329,696	— 3 × 360°	109,899	373	30	5719	05
92	55,992	— 2 × 360°	138,664	403	27	5719	04
93	142,525	„ „	167,508	430	24	5719	03
94	228,821	„ „	196,274	454	21	5718	02
1895	315,118	— 2 × 360°	225,039	— 475	17	8,5718	11,02
96	41,414	— 360°	253,805	492	15	5718	01
97	127,947	„	282,649	507	11	5718	11,00
98	214,243	„	311,414	518	8	5717	10,99
99	300,540	— 360°	340,180	426	4	5717	99
1900	26,836	—	8,945	— 530	1	8,5717	10,98
01	113,132	—	37,711	531	3	5716	97
02	199,429	—	66,476	528	6	5716	97
03	285,725	—	95,242	522	10	5715	96
04	12,022	+ 360°	124,007	512	13	5714	95
1905	98,554	„	152,851	— 499	17	8,5714	10,95
06	184,851	„	181,617	482	20	5713	94
07	271,147	„	210,382	462	23	5712	94
08	357,448	+ 360°	239,148	439	25	5712	94
09	83,976	+ 2 × 360°	267,992	414	29	5711	93
1910	170,273	+ 2 × 360°	296,758	— 385		8,5710	10,92

V in Teilen des Radius, Einheit: 5. Dezimale.

Tafel 1. (Fortsetzung.)

Monate	L Gemeinjahr	L Schaltjahr	⅓ L Gemeinjahr	⅓ L Schaltjahr
	°	°	°	°
Februar 0,0	7,3293	7,3293	2,443	2,443
März 0,0	13,9493	14,1857	4,650	4,729
April 0,0	21,2786	21,5150	7,093	7,172
Mai 0,0	28,3714	28,6078	9,457	9,536
Juni 0,0	35,7007	35,9371	11,900	11,979
Juli 0,0	42,7935	43,0300	14,265	14,343
August 0,0	50,1228	50,3593	16,708	16,787
September 0,0	57,4521	57,6885	19,151	19,230
Oktober 0,0	64,5450	64,7814	21,515	21,594
November 0,0	71,8742	72,1107	23,958	24,037
Dezember 0,0	78,9671	79,2035	26,322	26,401

Tage	L	⅓ L
	°	°
1	0,2364	0,079
2	4729	158
3	7093	236
4	0,9457	315
5	1,1821	0,394
6	4186	473
7	6550	552
8	1,8914	630
9	2,1279	709
10	2,3643	0,788
11	6007	867
12	2,8371	0,946
13	3,0736	1,025
14	3100	103
15	3,5464	1,182
16	3,7828	261
17	4,0193	340
18	2557	419
19	4921	497
20	4,7286	1,576
21	4,9650	655
22	5,2014	734
23	4378	813
24	6743	891
25	5,9107	1,970
26	6,1471	2,049
27	3836	128
28	6200	207
29	6,8564	285
30	7,0928	2,364
31	7,3293	2,443

Stunden	L	⅓ L
	°	°
1	0,0099	0,003
2	0197	007
3	0296	010
4	0394	013
5	0,0493	0,016
6	0591	020
7	0690	023
8	0788	026
9	0887	030
10	0,0985	0,033
11	1084	036
12	1182	039
13	1281	043
14	1379	046
15	0,1478	0,049
16	1576	053
17	1675	056
18	1773	059
19	1872	062
20	0,1970	0,066
21	2069	069
22	2167	072
23	2266	076
24	0,2364	0,079

Minuten	L
	°
1	0,0002
2	0003
3	0005
4	0007
5	0,0008
6	0010
7	0011
8	0013
9	0015
10	0,0016
20	0033
30	0049
40	0066
50	0082
60	0,0099

Tafel 1. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	$\log \eta$	Diff.	Π	Diff.	φ	Diff.	$\sin \frac{1}{2} \varphi$	Diff.	$\log \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}$	$\log a (1-\eta^2)$
1865	9,02986		81°,199		6°,1491		8,72944		0,04670	0,40832
1870	971	15	260	61	1471	20	930	14	668	833
1875	957	14	320	60	1451	20	915	15	667	833
1880	942	15	381	61	1430	21	901	14	665	833
1885	928	14	441	60	1410	20	886	15	664	834
1890	914	14	502	61	1389	21	872	14	662	834
1895	899	15	562	60	1369	20	857	15	661	834
1900	885	14	623	61	1348	21	843	14	659	835
1905	870	15	684	61	1328	20	828	15	658	835
1910	9,02856	14	81,745	61	6,1307	21	8,72814	14	0,04656	0,40835

Jan. 0,0	$\log \sin j$	Diff.	σ	Diff.	$\log \sin^2 \frac{1}{2} i$	A	$\log b$	B	$\log c$	C
1865	8,57328		11°,526		6,5430	− 0°,008	9,95531	0°,197	9,63484	− 0°,904
1870	294	34	454	72	5423	8	531	195	482	894
1875	260	34	382	72	5420	8	531	193	482	885
1880	226	34	310	72	5419	8	531	191	483	877
1885	192	34	238	72	5418	8	531	190	484	871
1890	158	34	166	72	5418	8	531	189	484	866
1895	124	34	094	72	5417	7	531	188	484	862
1900	090	34	11,022	72	5414	7	531	187	484	859
1905	056	34	10,949	73	5408	7	531	186	482	856
1910	8,57022	34	10,877	72	6,5400	− 0,007	9,95532	0,186	9,63479	− 0,853

$\log a = 9{,}99999$

Jan. 0,0	$a \sin A$	$a \cos A$	$b \sin B$	$b \cos B$	$c \sin C$	$c \cos C$
1865	− 0,00014	+ 0,99997	+ 0,00310	+ 0,90221	− 0,00680	+ 0,43130
1870	14	7	307	221	673	129
1875	13	7	304	221	666	129
1880	13	7	301	221	660	130
1885	13	7	299	220	656	131
1890	13	7	297	220	652	131
1895	13	7	296	220	649	131
1900	13	7	295	221	646	131
1905	13	8	294	221	644	129
1910	− 0,00013	+ 0,99998	+ 0,00293	+ 0,90223	− 0,00642	+ 0,43126

Tafel 2. — Tafel für (91) Aegina 1866—1910 nach den Elementen III.
(Fortsetzung.) Vgl. S. 55.

Jan. 0,0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_9	A_{10}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_9	B_{10}	Jan. 0,0
1866	+14	—82	—226	—133	—8	+16	—1	—4	—3	—158	—21	+191	—26	+7	+9	+5	+2	—2	1866
67	+ 6	84	209	135	8	17	1	4	3	160	19	209	19	8	8	5	2	1	67
68	— 2	86	192	136	7	17	1	4	3	161	16	226	11	9	6	5	2	1	68
69	10	87	173	137	6	18	—1	4	3	161	13	242	— 4	9	5	5	3	1	69
1870	—18	—89	—153	—137	—5	+18	0	—4	—3	—161	—10	+256	+ 4	+10	+3	+5	+3	—1	1870
71	26	90	132	137	4	18	0	3	3	160	7	268	12	10	+2	5	3	—1	71
72	34	92	110	137	4	18	0	3	3	159	— 4	278	20	11	0	5	4	0	72
73	42	93	88	136	2	18	0	3	3	158	0	287	27	11	—1	5	4	0	73
74	49	94	65	135	—1	18	+1	2	3	156	+ 3	294	35	11	3	5	4	0	74
1875	—57	—94	—41	—133	0	+18	+1	—2	—3	—153	+ 7	+299	+43	+11	—4	+5	+4	0	1875
76	64	95	—17	131	+1	18	1	2	3	150	11	301	51	11	6	5	4	0	76
77	72	95	+ 7	128	2	17	2	1	3	147	15	301	59	11	7	5	4	+1	77
78	79	95	31	124	3	16	2	—1	3	143	18	301	66	11	8	4	4	1	78
79	85	95	55	121	4	16	2	0	3	139	22	298	73	11	10	4	5	1	79
1880	—92	—94	+ 78	—117	+5	+15	+2	0	—3	—135	+26	+293	+80	+10	—11	+4	+5	+1	1880
81	98	94	101	112	6	14	2	0	3	130	30	286	87	10	12	4	5	1	81
82	105	93	124	107	6	13	3	+1	3	125	34	277	93	9	13	4	5	1	82
83	110	92	145	101	7	12	3	1	3	120	38	266	99	9	14	4	4	2	83
84	116	90	166	95	8	10	3	1	3	114	42	254	105	8	15	4	4	2	84
1885	—121	—89	+185	—89	+8	+9	+3	+2	—3	—108	+45	+240	+110	+7	—16	+4	+4	+2	1885
86	126	87	203	82	9	8	4	2	3	101	49	224	116	6	17	3	4	2	86
87	130	85	220	75	9	6	4	2	3	94	52	207	120	5	17	3	4	2	87
88	134	83	235	68	10	5	4	3	2	87	55	188	124	4	18	3	4	2	88
89	138	80	249	61	10	4	4	3	2	80	58	168	128	3	18	3	4	2	89
1890	—141	—78	+261	—53	+10	+2	+4	+3	—2	—73	+61	+147	+131	+2	—18	+2	+3	+2	1890
91	144	75	272	45	10	0	4	4	2	65	64	126	134	+1	18	2	3	3	91
92	146	72	280	38	10	—1	4	4	2	57	66	103	136	0	18	2	3	3	92
93	148	69	287	30	10	2	4	4	2	49	69	79	138	—1	18	2	2	3	93
94	150	66	292	22	9	4	5	4	2	41	71	56	139	2	18	2	2	3	94
1895	—151	—63	+295	—14	+9	—5	+5	+4	—1	—33	+72	+31	+139	—2	—18	+1	+2	+3	1895
96	151	60	296	— 5	8	7	5	4	1	25	74	+ 7	140	3	17	1	1	3	96
97	151	57	295	+ 3	8	8	5	4	1	17	75	—18	139	4	16	+1	+1	3	97
98	151	54	292	10	7	10	5	5	1	— 8	76	42	138	5	16	0	0	3	98
99	150	51	287	18	7	11	5	5	—1	0	77	66	137	5	15	0	0	3	99
1900	—149	—47	+280	+26	+6	—12	+5	+5	0	+ 8	+78	— 89	+135	—6	—14	0	0	+3	1900
01	148	44	271	33	5	13	5	5	0	16	79	112	133	6	13	0	—1	3	01
02	146	41	261	41	4	14	5	4	0	25	79	135	131	7	12	0	1	3	02
03	143	38	248	48	3	15	5	4	0	33	79	156	128	7	11	—1	1	3	03
04	140	36	234	54	2	16	5	4	0	40	79	176	124	7	9	1	2	3	04
1905	—137	—33	+219	+61	+1	—17	+5	+4	0	+48	+78	—195	+120	—7	—8	—1	—2	+3	1905
06	134	30	202	67	0	17	5	4	+1	56	78	213	117	7	7	2	2	3	06
07	130	28	184	73	0	18	4	4	1	63	78	229	112	7	5	2	3	3	07
08	125	26	164	79	—1	18	4	4	1	70	77	244	108	6	4	2	3	3	08
09	120	24	144	84	2	18	4	3	1	77	76	257	103	6	2	2	3	3	09
1910	—115	—22	+122	+89	—3	—18	+4	+3	+1	+84	+76	—268	+ 98	—6	—1	—2	—4	+3	1910

Einheit: 5. Dezimale, in Teilen des Radius.



Tafel 2. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	G_3	H_3	G_3'	H_3'	Jan. 0,0
1866	−38	−10	+92	−16	+2	+14	+10	+21	−4	+27	+107	+78	+5	−17	+3	−7	+1	−1	−7	1866
67	38	8	100	12	3	13	10	23	−2	28	99	79	4	18	3	7	2	2	7	67
68	38	6	108	7	4	11	11	26	0	29	91	80	4	19	2	7	2	2	7	68
69	38	5	115	−3	4	10	11	27	+2	30	82	81	4	20	1	7	3	3	6	69
1870	−38	−3	+121	+2	+4	+8	+11	+29	+4	+31	+72	+81	+3	−21	+1	−7	+3	−3	−6	1870
71	37	−1	127	7	5	6	11	31	6	32	62	81	3	21	0	6	4	4	6	71
72	37	0	132	11	5	4	11	32	8	32	51	81	2	22	0	6	4	4	6	72
73	36	+2	135	16	5	2	11	34	10	33	40	80	2	22	−1	5	5	5	5	73
74	36	4	138	21	5	+1	11	35	12	33	29	80	1	22	2	5	5	5	5	74
1875	−35	+6	+140	+26	+5	−1	+11	+36	+14	+33	+18	+78	+1	−22	−2	−5	+6	−6	−4	1875
76	34	8	141	30	5	3	10	36	16	34	+7	77	0	22	3	4	6	6	4	76
77	33	10	141	35	5	4	10	36	18	34	−5	75	−1	21	3	4	6	6	4	77
78	32	12	140	40	5	6	10	37	20	34	17	73	1	21	4	3	7	6	3	78
79	31	14	138	44	5	8	10	37	21	33	28	71	2	21	4	3	7	7	2	79
1880	−30	+16	+136	+48	+5	−10	+10	+36	+23	+33	−39	+68	−2	−20	−5	−2	+7	−7	−2	1880
81	28	17	132	52	5	11	9	36	25	33	50	65	3	19	5	1	7	7	1	81
82	27	19	128	56	4	13	9	35	26	32	61	62	3	18	6	−1	7	7	−1	82
83	26	21	122	59	4	14	9	34	28	32	71	58	4	17	6	0	7	7	0	83
84	24	22	116	63	4	16	8	33	29	31	81	54	4	16	7	0	7	7	0	84
1885	−22	+24	+109	+66	+3	−17	+8	+32	+30	+30	−90	+51	−4	−14	−7	+1	+7	−7	+1	1885
86	21	25	101	68	2	18	8	30	32	29	98	47	5	13	8	2	7	7	2	86
87	19	26	93	71	2	19	7	29	32	28	106	42	5	12	8	2	7	7	2	87
88	17	28	84	73	1	20	7	27	34	27	114	38	5	10	8	3	7	6	3	88
89	15	29	75	75	+1	20	6	25	34	26	120	33	5	8	9	3	7	6	3	89
1890	−13	+30	+65	+77	0	−21	+6	+22	+35	+25	−126	+29	−5	−6	−9	+4	+6	−6	+4	1890
91	11	30	54	78	0	21	5	20	36	24	131	24	5	5	10	4	6	6	4	91
92	10	31	43	79	−1	22	5	18	36	23	135	20	5	3	10	5	6	5	5	92
93	7	32	32	80	2	22	4	15	37	22	138	15	5	−1	10	5	5	5	5	93
94	5	32	21	80	2	22	4	13	37	21	140	10	5	0	10	6	5	4	5	94
1895	−3	+32	+9	+80	−3	−22	+3	+10	+38	+20	−141	+6	−5	+2	−10	+6	+4	−4	+6	1895
96	−1	32	−2	80	3	22	2	7	38	18	142	+1	4	4	11	6	4	4	6	96
97	+1	32	14	79	4	21	2	4	38	17	141	−3	4	6	11	6	3	3	6	97
98	3	32	25	78	4	21	1	+2	38	16	139	8	4	8	11	7	3	2	6	98
99	5	32	37	77	4	20	+1	−1	37	15	137	12	3	9	11	7	2	2	7	99
1900	+7	+32	−48	+76	−5	−19	0	−4	+37	+14	−133	−16	−3	+11	−11	+7	+1	−1	+7	1900
01	9	31	58	75	5	18	−1	6	37	13	129	20	2	12	11	7	+1	−1	7	01
02	11	31	69	73	5	17	1	9	36	12	124	24	2	14	11	7	0	0	7	02
03	13	30	79	71	5	16	2	12	35	12	118	28	−1	15	11	7	0	0	7	03
04	15	30	88	70	5	15	2	14	35	11	111	32	0	16	10	7	−1	+1	7	04
1905	+17	+29	−97	+67	−5	−13	−3	−16	+34	+10	−104	−35	0	+18	−10	+7	−2	+2	+7	1905
06	18	28	105	65	5	12	4	19	33	10	95	39	+1	19	10	7	2	2	7	06
07	20	28	112	63	5	10	4	21	32	9	86	42	1	19	10	7	3	3	6	07
08	22	27	119	60	5	9	4	23	31	9	77	45	2	20	10	7	3	3	6	08
09	23	26	125	57	5	7	5	24	30	9	67	47	2	21	9	6	4	4	6	09
1910	+25	+25	−130	+55	−4	−5	−6	−26	+28	+8	−56	−50	+3	+21	−9	+6	−4	+4	+6	1910

Einheit: 5. Dezimale.

Tafel 3. — Tafeln für (91) Aegina 1910—1950. Vgl. S. 59.

Jan. 0,0	L	$\frac{1}{3}L$	G_3	H_3	G'_3	H'_3	log sin i	$\Omega = \Sigma$
1910	170°,278 + 2 × 360°	296°,758	+ 6	— 4	+ 4	+ 6	8,5710	10°,92
11	256,569 „ „	325,523	6	5	5	5	5709	92
12	342,865 „ „	354,288	5	5	5	5	5708	91
13	69,398 + 3 × 360°	23,133	5	6	5	4	5707	90
14	155,695 „ „	51,898	4	6	6	4	5705	90
1915	241,991 „ „	80,664	+ 4	— 6	+ 6	+ 4	8,5704	10,89
16	328,287 „ „	109,429	3	7	6	3	5703	88
17	54,820 + 4 × 360°	138,273	3	7	6	2	5702	87
18	141,117 „ „	167,039	2	7	7	2	5700	86
19	227,413 „ „	195,804	2	7	7	1	5699	85
1920	313,709 „ „	224,570	+ 1	— 7	+ 7	+ 1	8,5698	10,84
21	40,242 + 5 × 360°	253,414	0	7	7	0	5696	82
22	126,539 „ „	282,180	0	7	7	0	5695	81
23	212,835 „ „	310,945	— 1	7	7	— 1	5694	80
24	299,131 „ „	339,710	2	7	7	2	5692	78
1925	25,664 + 6 × 360°	8,555	— 2	— 7	+ 7	— 2	8,5691	10,77
26	111,960 „ „	37,320	3	7	6	3	5690	75
27	198,257 „ „	66,086	3	7	6	3	5688	74
28	284,553 „ „	94,851	4	6	6	4	5687	72
29	11,086 + 7 × 360°	123,695	4	6	6	4	5686	70
1930	97,382 „ „	152,461	— 5	— 6	+ 5	— 4	8,5684	10,68
31	183,679 „ „	181,226	5	5	5	5	5683	66
32	269,975 „ „	209,992	6	5	5	5	5682	64
33	356,508 „ „	238,836	6	4	4	6	5681	62
34	82,804 + 8 × 360°	267,601	6	4	4	6	5679	60
1935	169,101 „ „	296,367	— 6	— 3	+ 3	— 6	8,5678	10,58
36	255,397 „ „	325,132	7	3	3	6	5677	56
37	341,930 „ „	353,977	7	2	2	7	5676	54
38	68,226 + 9 × 360°	22,742	7	2	2	7	5675	52
39	154,523 „ „	51,508	7	— 1	+ 1	7	5674	49
1940	240,819 „ „	80,273	— 7	0	0	— 7	8,5673	10,47
41	327,352 „ „	109,117	7	0	0	7	5673	44
42	53,648 + 10 × 360°	137,883	7	+ 1	— 1	7	5672	42
43	139,945 „ „	166,648	7	1	1	7	5671	40
44	226,241 „ „	195,414	7	2	2	7	5670	37
1945	312,774 „ „	224,258	— 7	+ 3	— 2	— 7	8,5670	10,35
46	39,070 + 11 × 360°	253,023	7	3	3	6	5669	33
47	125,367 „ „	281,789	6	4	3	6	5669	30
48	211,663 „ „	310,554	6	4	4	6	5668	28
49	298,196 „ „	339,399	6	5	4	5	5668	26
1950	24,492 + 12 × 360°	8,164	— 5	+ 5	— 5	— 5	8,5668	10,24

$\log a = 0,413336.$

Tafel 3. (Fortsetzung.)

Monate	L Gemeinjahr	L Schaltjahr	$\frac{1}{3}L$ Gemeinjahr	$\frac{1}{3}L$ Schaltjahr
	°	°	°	°
Februar 0,0	7,3293	7,3293	2,443	2,443
März 0,0	13,9493	14,1857	4,650	4,729
April 0,0	21,2786	21,5150	7,093	7,172
Mai 0,0	28,3714	28,6078	9,457	9,536
Juni 0,0	35,7007	35,9371	11,900	11,979
Juli 0,0	42,7935	43,0300	14,265	14,343
August 0,0	50,1228	50,3593	16,708	16,787
September 0,0	57,4521	57,6885	19,151	19,230
Oktober 0,0	64,5450	64,7814	21,515	21,594
November 0,0	71,8742	72,1107	23,958	24,037
Dezember 0,0	78,9671	79,2035	26,322	26,401

Tage	L	$\frac{1}{3}L$
	°	°
1	0,2364	0,079
2	4729	158
3	7093	236
4	0,9457	315
5	1,1821	0,394
6	4186	473
7	6550	552
8	1,8914	630
9	2,1279	709
10	2,3643	0,788
11	6007	867
12	2,8371	0,946
13	3,0736	1,025
14	3100	103
15	3,5464	1,182
16	3,7828	261
17	4,0193	340
18	2557	419
19	4921	497
20	4,7286	1,576
21	4,9650	655
22	5,2014	734
23	4378	813
24	6743	891
25	5,9107	1,970
26	6,1471	2,049
27	3836	128
28	6200	207
29	6,8564	285
30	7,0928	2,364
31	7,3293	2,443

Stunden	L	$\frac{1}{3}L$
	°	°
1	0,0099	0,003
2	0197	007
3	0296	010
4	0394	013
5	0,0493	0,016
6	0591	020
7	0690	023
8	0788	026
9	0887	030
10	0,0985	0,033
11	1084	036
12	1182	039
13	1281	043
14	1379	046
15	0,1478	0,049
16	1576	053
17	1675	056
18	1773	059
19	1872	062
20	0,1970	0,066
21	2069	069
22	2167	072
23	2266	076
24	0,2364	0,079

Minuten	L
	°
1	0,0002
2	0003
3	0005
4	0007
5	0,0008
6	0010
7	0011
8	0013
9	0015
10	0,0016
20	0033
30	0049
40	0066
50	0082
60	0,0099

Tafel 3. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	$\log\eta$		Π		φ		$\log\sin\frac{1}{2}\varphi$		$\log\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}$	$\log a(1-\eta^2)$	$\log\sin j$		σ		$\log\sin^2\frac{1}{2}i$	
1910	9,02856		81°,745		6°,1307		8,72815		0,04656	0,40835	8,57022		10°,877		6,5401	
1915	842	14	806	61	1287	20	801	14	654	836	8,56988	34	805	72	5389	12
1920	827	15	867	61	1266	21	786	15	653	836	954	34	732	73	5376	13
1925	813	14	928	61	1246	20	772	14	652	836	919	35	660	72	5363	13
1930	798	15	81,989	61	1225	21	757	15	650	837	885	34	587	73	5349	14
1935	784	14	82,050	61	1205	20	743	14	648	837	851	34	515	72	5337	12
1940	769	15	111	61	1184	21	728	15	647	837	816	35	442	73	5328	9
1945	755	14	172	61	1164	20	714	14	646	838	782	34	370	72	5320	8
1950	9,02740	15	82,233	61	6,1143	21	8,72699	15	0,04644	0,40838	8,56747	35	10,297	73	6,5316	4

Konstanten für den Aequator.

Jan. 0,0	$\log a$	Präzession	$\log b$	Präzession (5. Dezimale)	$\log c$	Präzession (5. Dezimale)	A	Präzession (in 0°,001)	B	Präzession (in 0°,001)	C	Präzession (in 0°,001)
1910			9,95532		9,63479				0°,186		− 0°,853	
1915			33		75				185		850	
1920			34		70				184		844	
1925			35		66				182		838	
1930	9,99999	verschwindend klein	36	+ 0,03	62	− 0,14	− 0°,007	+ 13,95	181	+ 14,19	830	+ 12,92
1935			36		58				179		822	
1940			37		56				177		812	
1945			37		54				174		802	
1950			9,95537		9,63458				0,172		− 0,793	

Jan. 0,0	$a\sin A$	Präzession (5. Dezimale)	$a\cos A$	Präzession (5. Dezimale)	$b\sin B$	Präzession (5. Dezimale)	$b\cos B$	Präzession (5. Dezimale)	$c\sin C$	Präzession (5. Dezimale)	$c\cos C$	Präzession (5. Dezimale)
1910	− 0,00013	+ 24,35		− 0,04	+ 0,00293	+ 22,34	+ 0,90223	− 0,08	− 0,00642		+ 0,43126	− 0,01
1915	13	35		5	291	34	225	4	639		122	2
1920	13	35		6	290	34	227	6	636		118	2
1925	13	35		8	287	34	229	7	631		114	3
1930	12	35	+ 0,99998	9	285	34	231	8	625	+ 9,72	109	4
1935	12	36		10	282	34	232	10	618		106	4
1940	12	36		12	278	35	234	11	611		104	5
1945	12	36		14	275	35	234	12	604		102	6
1950	− 0,00012	+ 24,36		− 0,15	+ 0,00272	+ 22,35	+ 0,90234	− 0,14	− 0,00596		+ 0,43102	− 0,06

Die Werte von a, b, c, A, B, C beziehen sich, wie alle übrigen, auf das mittlere Aequinoktium 1900,0. Die Kolumne „Präzession" gibt die jährliche Aenderung wegen der Präzession, und zwar so, wie sie direkt zur Reduktion auf den jeweiligen Jahresanfang gebraucht wird; wegen ihrer Bedeutung sehe man S. 106. Bei der Reduktion mit diesen Werten fällt die Reduktion der Elemente und der Längen wegen Präzession ganz fort.

Tafel 4. — Tafeln für (91) Aegina 1910—1950:

Jan. 0,0	V	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_{10}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_{10}	Jan. 0,0
1910	−385	−115	−22	+120	+89	−3	−18	+4	+1	+84	+76	−263	+98	−6	−1	−2	+3	1910
11	354	109	20	98	94	4	18	4	2	90	75	272	93	5	+1	3	3	11
12	321	103	18	75	98	4	18	4	2	96	74	279	88	5	2	3	3	12
13	285	97	17	52	102	5	18	4	2	102	73	284	82	4	4	3	3	13
14	248	90	15	28	106	5	18	4	2	108	72	287	76	3	5	3	3	14
1915	−209	−83	−14	+ 5	+109	−6	−17	+3	+2	+113	+72	−289	+71	−2	+7	−4	+3	1915
16	168	76	13	−19	113	6	17	3	2	118	71	288	65	2	8	4	2	16
17	126	69	12	43	115	6	16	3	2	122	70	285	59	−1	9	4	2	17
18	84	61	11	66	118	6	15	3	2	126	70	281	53	0	11	4	2	18
19	− 41	54	10	89	120	6	14	2	3	130	69	275	47	+1	12	4	2	19
1920	+ 2	−46	−9	−112	+122	−6	−13	+2	+3	+133	+68	−266	+40	+2	+13	−4	+2	1920
21	46	38	9	133	124	6	12	2	3	136	68	256	34	3	14	4	2	21
22	89	30	8	154	126	6	11	2	3	138	68	245	28	4	15	4	2	22
23	131	21	8	174	127	5	10	2	3	140	68	231	21	5	16	5	1	23
24	173	13	7	192	128	5	8	1	3	142	68	216	15	5	16	5	1	24
1925	+213	− 4	−6	−210	+128	−4	−7	+1	+3	+143	+68	−200	+ 9	+6	+17	−5	+1	1925
26	252	+ 4	6	226	128	4	6	+1	3	144	68	182	+ 2	7	18	5	1	26
27	290	12	5	240	128	3	4	0	3	144	69	163	− 4	7	18	5	1	27
28	325	21	4	253	128	2	2	0	3	144	69	143	11	8	18	5	+1	28
29	358	29	3	264	128	−1	−1	0	3	143	70	122	17	8	18	5	0	29
1930	+389	+38	−2	−273	+127	0	0	0	+3	+142	+71	−100	−24	+8	+18	−5	0	1930
31	417	46	−1	280	126	+1	+2	−1	3	141	71	77	30	9	18	5	0	31
32	443	54	0	286	125	2	4	1	3	139	72	54	37	9	18	5	0	32
33	466	62	+1	290	123	3	5	1	3	137	73	30	43	9	18	5	0	33
34	485	70	2	292	121	4	6	1	3	134	74	− 6	50	9	17	5	0	34
1935	+501	+78	+4	−292	+118	+4	+ 8	−2	+3	+131	+75	+18	−56	+8	+17	−5	−1	1935
36	514	85	6	290	116	5	9	2	3	127	76	41	62	8	16	4	1	36
37	524	92	8	286	113	6	10	2	3	123	77	65	69	8	15	4	1	37
38	530	99	10	280	109	7	12	2	3	118	78	88	75	7	14	4	1	38
39	532	106	12	272	106	8	13	3	3	114	79	111	81	7	13	4	1	39
1940	+531	+112	+15	−262	+102	+ 9	+14	−3	+3	+109	+80	+133	−87	+6	+12	−4	−2	1940
41	527	119	18	251	97	9	15	3	3	103	80	154	92	5	11	4	2	41
42	519	124	20	238	92	10	16	3	3	98	81	174	98	4	10	4	2	42
43	507	130	23	223	87	10	16	3	3	92	82	193	103	3	9	3	2	43
44	492	135	26	207	82	11	17	4	2	85	82	210	108	2	7	3	2	44
1945	+474	+139	+30	−189	+76	+11	+18	−4	+2	+79	+82	+226	−113	+1	+6	−3	−2	1945
46	453	144	33	170	70	11	18	4	2	72	82	241	118	0	4	3	2	46
47	428	148	36	150	63	11	18	4	2	65	82	254	122	−1	3	3	3	47
48	401	151	40	130	57	11	18	4	2	58	82	266	126	2	+1	2	3	48
49	371	154	43	108	50	11	18	4	2	51	81	275	129	3	0	2	3	49
1950	+339	+157	+47	− 85	+42	+11	+18	−4	+2	+43	+80	+283	−132	−4	−2	−2	−3	1950

Einheiten der 5. Dezimale (s. S. 59).

$$K = \Sigma A_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma B_n \cos \frac{n}{3} L, \qquad R = \Sigma C_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma D_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$W = K + V, \qquad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \qquad \varrho = \eta \cos \mathrm{v} + R,$$

$$M = L - \Pi - W,$$

$$\varepsilon - M = \eta \sin \varepsilon,$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{v} - \varepsilon) = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \sin \varepsilon}{\sqrt{1-\eta \cos \varepsilon}}, \qquad \sin \varphi = \eta,$$

$$v = \mathrm{v} + \Pi = L - W + (\mathrm{v} - M),$$

Die Funktionen R, K, V. Vgl. S. 59.

Jan. 0,0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	Jan. 0,0
1910	+25	+26	−130	+55	−4	−5	−6	−26	+28	+8	−57	−50	+3	+21	−9	1910
11	26	25	134	52	4	3	6	27	27	8	46	53	3	22	9	11
12	28	24	137	49	4	−2	7	28	26	8	35	55	4	22	9	12
13	29	23	140	46	3	0	7	29	24	8	23	57	4	22	8	13
14	30	23	141	43	3	+2	8	30	22	8	−12	59	5	22	8	14
1915	+31	+22	−142	+40	−2	+4	−8	−31	+21	+8	0	−61	+5	+22	−7	1915
16	32	22	141	37	2	6	8	31	19	9	+11	63	5	21	7	16
17	33	21	140	34	1	7	9	31	17	9	23	64	5	21	6	17
18	34	21	138	30	−1	9	9	31	15	9	34	66	5	20	6	18
19	35	21	134	27	0	10	9	30	13	9	45	67	5	19	6	19
1920	+36	+20	−130	+24	+1	+12	−10	−30	+12	+ 9	+56	−68	+6	+18	−5	1920
21	36	20	125	21	1	14	10	29	10	9	67	69	5	17	4	21
22	37	20	120	17	2	15	10	28	8	10	77	70	5	16	4	22
23	37	20	113	14	2	16	10	27	6	10	86	71	5	15	3	23
24	37	20	106	10	3	17	10	26	+4	10	95	72	5	14	3	24
1925	+38	+20	−98	+7	+3	+18	−11	−24	+1	+10	+103	−73	+4	+12	−2	1925
26	38	21	89	+3	4	19	11	22	−1	10	111	73	4	10	2	26
27	37	21	79	−1	4	20	11	20	3	10	118	73	3	9	−1	27
28	37	21	69	4	4	21	11	18	5	10	124	74	3	7	0	28
29	37	22	59	8	5	21	11	16	7	9	129	74	2	6	0	29
1930	+36	+22	−48	−12	+5	+22	−11	−13	− 9	+9	+134	−73	+2	+4	+1	1930
31	36	23	37	15	5	22	11	11	11	8	137	73	1	+2	1	31
32	35	23	26	19	5	22	11	8	13	8	140	72	+1	0	2	32
33	35	24	15	23	5	22	10	6	14	7	141	72	0	−2	3	33
34	34	24	− 3	27	5	22	10	−3	16	6	142	71	0	4	3	34
1935	+33	+25	+ 9	−31	+5	+21	−10	0	−18	+5	+142	−70	−1	−5	+4	1935
36	32	26	20	35	5	21	10	+3	20	4	141	68	1	7	4	36
37	31	26	32	38	5	20	10	5	22	3	139	67	2	9	5	37
38	30	27	43	42	5	20	9	8	23	2	136	65	2	10	5	38
39	28	27	54	46	4	19	9	11	25	+1	132	63	3	12	6	39
1940	+27	+28	+64	−50	+4	+18	−9	+14	−26	−1	+127	−60	−4	−13	+6	1940
41	25	28	75	53	4	16	8	16	28	2	121	58	4	15	7	41
42	24	28	84	57	3	15	8	19	29	4	115	55	4	16	7	42
43	22	28	93	60	3	14	8	21	30	6	108	52	5	17	8	43
44	20	29	102	63	2	12	7	23	32	7	100	49	5	18	8	44
1945	+19	+29	+110	−66	+2	+11	−7	+26	−33	− 9	+91	−46	−5	−19	+8	1945
46	17	28	117	69	1	9	6	28	34	11	82	42	5	20	9	46
47	15	28	123	72	+1	8	6	29	34	13	72	38	5	21	9	47
48	13	28	128	74	0	6	5	31	35	15	62	34	5	21	9	48
49	11	28	133	76	−1	4	5	32	36	17	51	30	5	22	10	49
1950	+ 9	+27	+137	−78	−1	+2	−4	+34	−36	−19	+40	−25	−5	−22	+10	1950

$$x = ar\cos(A + v + \Omega - \Sigma), \qquad \mathfrak{z} = G_3 \sin L + H_3 \cos L,$$

$$y = br\sin(B + v + \Omega - \Sigma), \qquad \sin b = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{v} = v - \sigma,$$

$$z = cr\sin(C + v + \Omega - \Sigma), \qquad \sin(v - l) = \frac{\sin^2 \frac{i}{2}}{\cos b} \sin 2(v - \Sigma).$$

Die hier nicht tabulierten Größen siehe in Tafel 3.

Bei der Berechnung dieser Tafeln sind die kleinen Glieder 3. Grades, welche in den Gleichungen 116) berücksichtigt sind, fortgelassen worden.

Tafel 5. — Tafel für (91) Aegina 1910—1950: Die Funktionen S und $\frac{dR}{dv}$.
Vgl. S. 66.

Jan. 0,0	C'_2	C'_3	C'_4	C'_5	C'_6	C'_7	C'_8	C'_9	C'_{10}	C'_{11}	D'_0	D'_2	D'_3	D'_4	D'_5	D'_6	D'_7	D'_8	D'_9	D'_{10}	D'_{11}	Jan. 0,0
1910	—7	+55	+68	—4	—30	+12	+1	0	+2	—2	—5	+18	—119	+75	—6	—3	—6	—6	+2	+1	0	1910
11	7	45	71	5	30	12	+1	0	2	2	4	18	124	71	5	0	6	6	2	1	0	11
12	7	35	75	5	30	11	0	+1	2	2	2	18	127	67	4	+2	7	6	2	1	0	12
13	7	25	78	6	29	11	—1	1	2	2	—1	17	129	63	4	5	8	6	2	+1	0	13
14	6	14	81	6	29	10	1	1	2	2	0	17	131	59	3	7	9	6	2	0	0	14
1915	—6	+ 3	+83	—7	—28	+9	—2	+1	+2	—2	+2	+17	—132	+54	—2	+ 9	—10	—6	+2	0	0	1915
16	6	— 8	86	7	27	9	3	1	2	2	3	16	131	50	—1	12	10	5	2	0	+1	16
17	6	18	88	7	26	8	3	2	2	1	4	16	130	45	0	14	11	5	2	—1	1	17
18	6	29	90	7	25	7	4	2	2	1	6	16	128	40	+1	16	11	5	2	1	1	18
19	6	39	92	7	24	6	4	2	2	1	7	16	126	36	2	18	12	4	2	1	1	19
1920	—6	—49	+94	—7	—22	+5	—5	+2	+2	—1	+ 8	+15	—122	+31	+3	+20	—12	—4	+1	—2	+1	1920
21	5	59	95	6	20	4	5	2	1	1	9	15	118	26	4	21	12	3	1	2	1	21
22	5	69	96	6	18	4	5	2	1	1	10	15	112	21	5	23	13	3	1	2	1	22
23	5	78	97	6	17	3	6	2	1	1	11	15	106	16	6	24	13	2	1	2	2	23
24	5	86	98	5	14	2	6	2	+1	—1	12	15	100	11	6	26	13	1	+1	2	2	24
1925	—5	— 94	+98	—4	—12	+1	—6	+2	0	0	+13	+15	—92	+ 6	+7	+27	—13	—1	0	—2	+2	1925
26	5	101	98	4	10	0	6	2	0	0	14	15	84	+ 1	8	28	13	0	0	2	2	26
27	5	108	98	3	8	—1	6	2	0	0	14	15	76	— 4	8	28	12	+1	0	2	2	27
28	4	114	98	2	6	2	6	2	—1	0	15	15	67	9	9	29	12	1	0	2	2	28
29	4	119	97	—1	3	3	6	2	1	0	15	15	57	14	9	29	12	2	0	2	2	29
1930	—4	—123	+97	0	—1	—3	—6	+2	—1	0	+16	+15	—47	—19	+10	+30	—12	+2	0	—2	+2	1930
31	3	126	96	+1	+2	4	5	2	1	+1	16	15	37	24	10	29	11	3	—1	2	2	31
32	3	129	95	2	4	5	5	2	2	1	16	15	27	29	10	29	11	4	1	2	1	32
33	3	131	93	3	7	5	4	2	2	1	16	15	16	34	10	29	10	4	1	1	1	33
34	2	132	92	4	9	6	4	2	2	1	16	15	— 6	38	9	28	10	4	1	1	1	34
1935	—2	—132	+90	+5	+11	—6	—3	+2	—2	+1	+16	+15	+ 5	—43	+9	+27	—9	+5	—1	—1	+1	1935
36	—1	131	88	6	13	7	3	2	2	1	16	15	16	48	9	26	9	5	2	0	1	36
37	0	129	85	7	15	7	2	2	2	1	15	16	27	53	8	25	8	6	2	0	1	37
38	0	127	83	8	18	7	2	2	2	2	15	16	37	57	8	24	8	6	2	0	+1	38
39	1	123	80	9	19	8	—1	1	2	2	14	16	47	62	7	22	7	6	2	0	0	39
1940	+2	—119	+77	+10	+21	—8	0	+1	—2	+2	+14	+16	+57	—66	+6	+21	—6	+6	—2	+1	0	1940
41	2	114	73	11	23	8	0	1	2	2	13	16	67	70	5	19	6	6	2	1	0	41
42	3	108	70	11	24	8	+1	1	2	2	12	16	76	75	4	17	5	6	2	1	0	42
43	4	102	66	11	25	8	2	1	2	2	11	16	84	79	3	15	5	6	2	2	0	43
44	5	94	62	12	27	8	2	+1	2	2	10	16	92	82	2	13	4	6	2	2	0	44
1945	+6	—86	+57	+12	+27	—8	+3	0	—1	+2	+9	+16	+100	—86	+1	+11	—4	+5	—2	+2	—1	1945
46	7	78	53	12	28	8	3	0	1	2	8	16	107	89	0	8	4	5	2	2	1	46
47	8	69	48	12	29	8	4	0	—1	1	7	16	113	92	—1	6	3	5	2	2	1	47
48	9	60	43	12	29	8	4	0	0	1	5	16	118	95	2	4	3	4	2	2	1	48
49	10	50	37	12	29	8	5	0	0	1	4	16	122	98	4	+1	3	4	2	2	1	49
1950	+11	—40	+32	+11	+30	—8	+5	—1	0	+1	+3	+16	+126	—100	—5	—1	—2	+3	—2	+2	—1	1950

Einheiten der 5. Dezimale.

$$S = -\tfrac{1}{3} x_1 \quad \text{(s. Tafel 6)},$$

$$\frac{dR}{dv} = \Sigma C'_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma D'_n \cos \frac{n}{3} L.$$

Tafel 6. — Tafel für (91) Aegina: Oskulierende Elemente. Vgl. S. 89.

Jan. 0,0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_7	A_9	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_7	B_9	Jan. 0,0
1910	+82	0	−27	+3	0	+1	+2	−126	+84	−1	+ 6	−1	−7	−2	0	1910
11	84	−1	26	3	0	0	2	129	79	0	8	1	7	2	0	11
12	87	2	25	3	−1	0	2	130	74	+1	10	2	7	2	0	12
13	89	3	24	3	2	0	2	131	70	2	11	2	7	3	−1	13
14	91	4	23	2	3	0	2	131	65	3	12	2	6	3	1	14
1915	+93	−5	−22	+2	−3	0	+2	−130	+60	+4	+13	−2	−6	−3	−1	1915
16	95	6	21	2	4	0	2	129	55	6	15	3	6	3	1	16
17	96	6	19	1	5	−1	2	126	50	7	15	3	5	4	1	17
18	97	6	18	+1	5	1	1	123	44	8	16	3	5	4	1	18
19	98	7	16	0	6	1	1	118	39	9	17	3	4	4	1	19
1920	+98	−7	−15	0	−6	−2	+1	−113	+34	+11	+18	−3	−4	−4	−2	1920
21	99	7	13	0	6	2	1	108	29	12	18	3	3	4	2	21
22	99	7	12	−1	6	2	1	101	24	12	19	3	2	4	2	22
23	99	7	10	1	7	3	1	94	19	13	19	3	1	4	2	23
24	99	7	9	2	7	3	+1	86	14	14	19	3	−1	4	2	24
1925	+99	−7	−7	−2	−7	−4	0	−78	+ 9	+15	+19	−2	0	−4	−2	1925
26	98	6	5	2	7	4	0	69	+ 4	16	19	2	+1	3	2	26
27	97	6	4	3	7	5	0	59	− 1	16	19	2	2	3	2	27
28	96	6	−2	3	6	5	0	49	5	17	18	1	2	3	2	28
29	94	5	0	3	6	5	0	39	10	17	18	−1	3	2	2	29
1930	+93	−5	+1	−3	−6	−6	0	−29	−15	+17	+17	0	+4	−2	−2	1930
31	91	4	3	3	5	6	0	18	20	17	16	0	4	1	2	31
32	88	4	4	3	5	6	−1	− 8	24	17	15	0	5	−1	2	32
33	86	3	5	3	4	6	1	+ 3	29	17	14	+1	5	0	2	33
34	83	2	6	3	4	6	1	14	34	16	13	1	6	0	2	34
1935	+80	−2	+8	−3	−3	−6	−1	+24	−38	+16	+12	+1	+6	+1	−2	1935
36	77	1	9	3	2	6	1	35	42	15	11	2	7	1	2	36
37	74	−1	9	2	2	6	1	45	46	14	9	2	7	2	1	37
38	70	0	10	2	−1	6	1	55	50	14	8	2	7	2	1	38
39	66	0	11	2	0	6	1	65	55	13	6	3	7	3	1	39
1940	+61	+1	+12	−1	+1	−6	−2	+74	−58	+12	+5	+3	+7	+3	−1	1940
41	56	1	12	−1	1	5	2	83	62	11	3	3	7	4	1	41
42	51	1	12	0	2	5	2	91	66	9	+2	3	7	4	1	42
43	46	2	12	0	3	4	2	98	69	8	0	3	6	5	−1	43
44	41	2	13	0	4	4	2	105	73	7	−2	3	6	5	0	44
1945	+35	+2	+12	+1	+4	−4	−2	+111	−76	+5	−3	+3	+6	+6	0	1945
46	29	2	12	1	5	3	2	117	79	4	5	3	5	6	0	46
47	23	1	12	2	5	2	2	121	81	2	7	3	5	6	0	47
48	17	1	11	2	6	2	2	125	84	+1	8	2	4	6	0	48
49	11	+1	10	2	6	1	2	128	86	−1	10	2	3	6	0	49
1950	+ 4	0	+10	+3	+6	−1	−2	+130	−88	−2	−11	+2	+3	+6	0	1950

Einheiten der 5. Dezimale.

$$\xi_3 = \Sigma A_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma B_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$\xi_4 = \Sigma C_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma D_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$\delta L = \Sigma E_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma F_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$x_1 = \Sigma K_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma L_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$\frac{\delta a}{a} = \Sigma M_n \sin \frac{n}{3} L + \Sigma N_n \cos \frac{n}{3} L,$$

$$e \cos \delta\pi = \eta + \xi_3, \qquad \pi = \Pi + \delta\pi,$$

$$e \sin \delta\pi = -\xi_4,$$

$$L_e = L + \delta L,$$

$$a_e = a + \delta a,$$

$$p = a_e(1 - e^2) = a(1 - \eta^2)(1 + x_1).$$

a, η, Π, L, i und Ω siehe Tafel 3.

Tafel 6. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_6	C_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_6	D_7	Jan. 0,0
1910	+48	−12	+ 9	−2	+2	+4	−37	−76	+ 9	+11	−5	0	−4	1910
11	44	11	10	3	2	4	26	80	9	10	5	−1	5	11
12	39	11	12	3	2	4	16	83	10	10	4	1	5	12
13	35	10	13	4	2	3	− 5	86	10	9	4	1	5	13
14	30	10	14	4	2	2	+ 6	88	10	8	4	1	5	14
1915	+25	−9	+16	−4	+2	+2	+16	−91	+10	+6	−3	−1	−5	1915
16	21	8	17	5	1	2	27	93	10	5	3	1	6	16
17	16	8	17	5	1	+1	37	95	9	4	2	1	5	17
18	11	7	18	5	1	0	47	96	9	2	2	2	5	18
19	6	6	19	5	1	0	57	97	8	+1	1	2	5	19
1920	+ 1	−5	+20	−5	+1	0	+67	− 99	+8	−1	−1	−2	−5	1920
21	− 4	5	20	5	1	−1	76	99	7	2	0	2	5	21
22	9	4	21	5	+1	1	84	100	6	4	0	2	5	22
23	14	3	21	5	0	2	92	100	5	5	+1	2	4	23
24	19	2	21	5	0	2	100	100	4	7	1	2	4	24
1925	−24	−2	+21	−5	0	−2	+106	−100	+3	− 9	+2	−2	−4	1925
26	30	−1	21	4	0	2	112	100	2	10	2	2	3	26
27	35	0	21	4	0	2	118	100	+1	12	3	2	3	27
28	40	0	21	4	0	2	122	99	−1	14	3	2	3	28
29	45	0	20	3	0	3	126	98	2	15	3	2	2	29
1930	−50	+1	+19	−3	−1	−2	+128	−97	−4	−17	+4	−2	−2	1930
31	55	1	18	2	1	2	130	96	5	18	4	2	2	31
32	60	1	18	2	1	2	132	94	6	20	4	2	1	32
33	65	1	17	1	1	2	132	93	8	21	4	2	1	33
34	70	1	16	1	1	2	131	91	9	22	4	2	1	34
1935	−75	+1	+14	−1	−1	−2	+130	−89	−10	−23	+4	−1	−1	1935
36	79	1	13	0	1	2	127	86	12	24	4	1	1	36
37	84	+1	12	0	1	1	124	84	13	25	4	1	−1	37
38	88	0	10	+1	2	1	120	81	14	26	3	1	0	38
39	92	0	9	1	2	1	115	78	15	27	3	1	−1	39
1940	− 96	0	+7	+1	−2	−1	+109	−75	−16	−27	+3	−1	−1	1940
41	100	−1	5	1	2	1	103	71	17	28	3	−1	1	41
42	104	2	4	2	2	−1	96	68	18	28	2	0	1	42
43	107	2	+2	2	2	0	88	64	18	28	2	0	1	43
44	111	3	0	2	2	0	80	60	19	28	1	0	1	44
1945	−113	−4	−1	+2	−2	0	+71	−56	−19	−28	+1	0	−1	1945
46	116	4	3	2	2	0	62	52	20	28	+1	0	1	46
47	118	5	4	2	2	0	52	47	20	27	0	0	2	47
48	120	6	6	2	2	0	42	42	20	27	0	0	2	48
49	122	6	7	1	2	−1	32	38	20	26	0	+1	2	49
1950	−123	−7	−9	+1	−2	−1	+21	−33	−19	−25	0	+1	−2	1950

$C_5 = +B_5$, $\qquad D_5 = -A_5$,

$C_9 = -B_9$, $\qquad D_9 = +A_9$.

Tafel 6. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_{10}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_{10}	Jan. 0,0
1910	+109	+11	−11	+47	−7	−23	+4	+2	+3	+376	− 86	−42	+19	+51	−8	+ 6	0	−9	+2	1910
11	104	10	9	49	8	23	4	+1	3	347	93	41	20	48	7	8	−1	9	2	11
12	98	9	7	52	9	22	4	0	4	316	99	41	20	45	6	10	1	9	1	12
13	91	8	5	54	9	21	4	−1	4	283	105	40	21	42	5	11	2	9	+1	13
14	84	7	−3	56	10	20	3	2	4	248	111	40	21	39	4	13	2	9	0	14
1915	+78	+6	0	+57	−10	−19	+3	−3	+4	+212	−116	−40	+21	+36	−3	+14	−3	−9	0	1915
16	70	6	+2	59	10	18	3	4	4	174	121	39	21	33	2	16	3	8	−1	16
17	63	5	4	60	11	16	2	5	4	135	125	39	21	30	−1	17	3	8	1	17
18	55	5	6	61	11	15	2	6	3	95	129	38	20	26	0	19	4	7	2	18
19	48	4	8	62	10	13	1	6	3	54	133	38	20	23	+2	20	4	6	2	19
1920	+40	+4	+10	+63	−10	−12	+1	−7	+3	+ 13	−136	−38	+19	+20	+3	+21	−4	−6	−3	1920
21	31	3	12	64	10	10	0	8	2	− 28	139	38	18	17	4	22	4	5	3	21
22	23	3	14	65	10	8	0	8	2	69	142	38	16	13	5	22	4	4	3	22
23	15	2	16	65	9	6	−1	9	2	110	144	37	15	10	6	23	4	3	3	23
24	+ 6	2	18	66	8	4	1	9	1	150	145	37	14	7	7	23	4	2	4	24
1925	− 2	+2	+19	+66	−7	−2	−2	−9	+1	−189	−146	−37	+12	+ 3	+8	+24	−3	−1	−4	1925
26	11	2	21	66	6	0	2	9	0	226	147	38	10	0	8	24	3	0	4	26
27	19	1	22	66	5	+2	3	9	0	262	147	38	9	− 3	9	24	3	+1	4	27
28	28	+1	23	66	4	4	3	9	−1	296	147	38	7	6	10	24	2	2	4	28
29	36	0	24	65	3	6	3	9	1	329	146	38	5	10	10	23	2	3	4	29
1930	−44	0	+25	+65	−2	+ 7	−4	−8	−2	−359	−145	−39	+2	−13	+10	+23	−2	+4	−3	1930
31	52	−1	26	64	−1	9	4	8	2	387	143	39	0	16	11	22	−1	5	3	31
32	60	1	26	63	0	11	4	7	3	412	141	40	−2	19	11	21	0	6	3	32
33	68	2	26	62	+1	13	4	7	3	434	139	40	4	22	11	20	0	6	2	33
34	76	2	27	61	2	14	4	6	3	454	136	40	6	26	10	19	+1	7	2	34
1935	−84	−3	+26	+60	+3	+16	−4	−5	−4	−471	−133	−41	− 9	−29	+10	+18	+1	+8	−1	1935
36	91	4	26	59	4	17	4	4	4	484	129	42	11	32	10	16	2	8	1	36
37	98	5	26	57	5	18	3	3	4	494	125	42	13	35	9	15	2	8	0	37
38	105	6	25	56	6	20	3	2	4	501	121	43	15	38	8	14	3	9	0	38
39	112	7	24	54	7	21	3	2	4	505	116	43	17	41	8	12	3	9	+1	39
1940	−118	− 8	+23	+52	+8	+22	−2	−1	−4	−506	−111	−44	−19	−44	+7	+10	+3	+9	+1	1940
41	124	10	22	50	9	22	2	0	3	502	105	44	21	47	6	8	4	9	2	41
42	130	11	20	47	9	23	1	+1	3	495	99	45	23	50	5	6	4	9	2	42
43	135	13	19	45	10	23	−1	2	3	486	93	45	25	52	4	4	4	9	2	43
44	140	14	18	42	10	24	0	3	2	473	87	45	26	55	3	3	4	9	3	44
1945	−144	−16	+16	+39	+10	+24	0	+4	−2	−457	−80	−45	−28	−57	+2	+1	+4	+8	+3	1945
46	148	18	14	36	11	24	+1	5	2	437	74	45	29	60	0	−1	4	8	4	46
47	152	19	12	33	10	24	1	6	1	415	67	45	30	62	−1	3	4	7	4	47
48	155	21	10	30	10	23	2	7	−1	390	59	45	31	64	2	5	4	6	4	48
49	158	23	8	26	10	23	2	7	0	363	52	45	32	66	3	7	3	6	4	49
1950	−161	−25	+ 6	+22	+10	+22	+3	+8	0	−333	−44	−45	−33	−67	−4	−9	+3	+5	+4	1950

Tafel 6. (Fortsetzung.)

Jan. 0,0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	M_1	M_2	M_3	M_5	M_7	N_0	N_1	N_2	N_3	N_5	N_7	Jan. 0,0
1910	−34	−7	+12	+24	−4	+3	−2	−6	+33	−35	−2	+2	−19	+3	+12	−4	−1	−16	−7	+8	−4	−3	+5	−15	−3	+4	+2	−4	1910
11	36	7	12	23	4	4	2	6	34	33	2	+1	21	3	12	3	0	17	7	9	4	3	6	14	3	3	2	4	11
12	37	6	13	21	3	5	3	6	36	31	2	0	22	4	12	3	0	18	8	9	3	3	7	13	3	3	2	4	12
13	38	6	12	20	3	6	3	6	37	29	2	−1	23	4	11	3	+1	19	8	9	3	3	8	12	3	2	3	4	13
14	39	5	12	19	2	7	3	5	38	27	3	2	24	4	11	3	1	19	8	9	3	4	9	11	3	+1	3	4	14
1915	−40	−5	+12	+17	−2	+8	−3	−5	+38	−25	−3	−3	−25	+4	+10	−3	+2	−20	−8	+9	−2	−4	+10	−10	−2	0	+3	−3	1915
16	41	5	12	16	1	9	3	5	38	23	3	4	26	4	9	3	2	20	8	9	2	4	10	9	2	0	4	3	16
17	42	4	12	15	−1	9	3	5	38	20	3	5	27	5	9	2	3	21	8	9	2	4	11	8	2	−1	4	3	17
18	43	4	11	13	0	10	4	4	37	18	4	6	28	5	8	2	4	21	8	9	1	4	11	7	2	2	4	3	18
19	44	4	11	12	0	11	4	4	36	16	4	6	28	5	7	2	4	22	8	9	−1	4	11	6	2	2	4	3	19
1920	−44	−4	+10	+10	+1	+11	−4	−3	+35	−14	−4	−7	−29	+5	+6	−2	+4	−22	−8	+9	0	−4	+11	−4	−1	−3	+4	−2	1920
21	44	4	10	8	1	12	4	3	34	12	5	8	29	5	5	2	5	22	8	8	0	5	11	3	1	4	4	2	21
22	44	4	9	7	2	12	4	2	32	9	5	9	30	4	4	2	5	22	8	8	0	5	10	2	1	5	4	2	22
23	44	3	8	5	2	12	4	2	30	6	5	10	30	4	3	1	5	22	8	8	+1	5	10	−1	−1	5	4	2	23
24	44	3	7	4	3	13	4	1	28	4	5	10	30	4	2	1	5	23	8	7	1	5	9	0	0	6	4	1	24
1925	−44	−4	+6	+2	+3	+13	−4	−1	+25	−1	−6	−11	−30	+4	+1	−1	+6	−22	−8	+7	+2	−5	+8	+2	0	−6	+4	−1	1925
26	44	4	6	0	3	13	4	0	22	+1	6	11	31	3	0	−1	6	22	8	6	2	5	8	3	0	7	3	−1	26
27	43	4	5	−1	4	13	4	0	19	4	6	12	30	3	−1	0	6	22	8	5	3	5	7	4	0	7	3	0	27
28	42	4	4	3	4	13	4	+1	16	6	6	12	30	2	2	0	6	22	8	5	3	5	6	5	0	8	3	0	28
29	42	4	3	5	4	12	4	2	13	8	6	12	30	2	3	0	5	21	8	4	3	5	4	7	+1	8	3	0	29
1930	−41	−4	+2	− 6	+4	+12	−4	+2	+9	+11	−6	−12	−30	+1	−4	0	+5	−21	−8	+4	+3	−5	+3	+ 8	+1	−8	+2	0	1930
31	40	5	+1	8	5	12	4	3	5	13	6	12	29	+1	5	0	5	21	8	3	4	5	+2	9	1	9	2	+1	31
32	38	5	0	10	5	11	4	3	+1	15	6	13	29	0	6	+1	4	20	8	2	4	5	0	10	1	9	1	1	32
33	37	5	−1	11	5	11	4	4	−2	17	5	12	28	0	7	1	4	20	8	1	4	5	−1	11	2	9	1	1	33
34	36	5	2	13	5	10	4	4	6	20	5	12	28	0	8	1	4	19	8	+1	4	5	3	12	2	9	+1	2	34
1935	−34	−6	−4	−14	+5	+10	−4	+5	−10	+22	−5	−12	−27	−1	−8	+1	+3	−18	−8	0	+4	−5	−5	+13	+2	−9	0	+2	1935
36	33	6	4	16	4	9	4	5	14	24	4	12	26	2	9	2	3	18	8	−1	4	5	6	14	2	9	0	2	36
37	31	6	5	17	4	8	4	5	18	25	4	11	25	2	10	2	2	17	8	2	4	4	8	15	2	9	−1	2	37
38	29	7	6	18	4	7	4	5	22	27	3	11	24	2	11	2	2	16	8	2	4	4	10	16	3	9	1	2	38
39	27	7	7	20	4	6	4	6	26	29	3	10	23	3	11	2	+1	15	8	3	4	4	12	17	3	9	2	3	39
1940	−25	−7	−8	−21	+3	+5	−4	+6	−30	+31	−2	−10	−22	−3	−12	+2	0	−14	−8	−4	+4	−4	−14	+18	+3	−8	−2	+3	1940
41	23	8	9	22	3	4	3	6	34	32	2	9	21	4	12	3	0	13	8	4	3	4	15	18	3	8	2	3	41
42	21	8	9	23	3	3	3	6	37	34	−1	8	20	4	12	3	−1	12	7	5	3	4	17	19	3	8	3	3	42
43	19	8	10	24	2	2	3	5	40	35	0	7	19	4	12	3	2	11	7	6	3	4	19	20	4	7	3	4	43
44	17	8	11	25	2	+1	3	5	43	36	0	7	17	4	13	3	2	10	7	6	2	3	20	20	4	7	3	4	44
1945	−14	−8	−11	−26	+1	0	−3	+5	−46	+37	+1	−6	−16	−5	−13	+3	−3	−9	−7	−7	+2	−3	−22	+21	+4	−6	−4	+4	1945
46	12	8	12	27	+1	−1	2	5	49	38	2	5	14	5	13	3	3	8	7	7	2	3	23	21	4	6	4	4	46
47	10	8	12	28	0	2	2	4	51	39	3	4	13	5	13	4	3	6	7	8	1	3	25	21	4	5	4	4	47
48	7	8	12	28	0	3	2	4	53	40	4	3	11	5	12	4	4	5	7	8	+1	2	26	22	5	4	4	4	48
49	5	8	12	29	−1	4	2	3	55	40	5	2	10	5	12	4	4	4	7	8	0	2	27	22	5	4	4	4	49
1950	−2	−8	−13	−30	−1	−5	−2	+3	−57	+41	+5	−1	− 8	−5	−12	+4	−5	−3	−7	−9	0	−2	−28	+22	+5	−3	−4	+5	1950

$M_4 = K_4$, $N_4 = L_4$,

$M_6 = K_6$, $N_6 = L_6$,

$M_8 = K_8$, $N_8 = L_8$.

